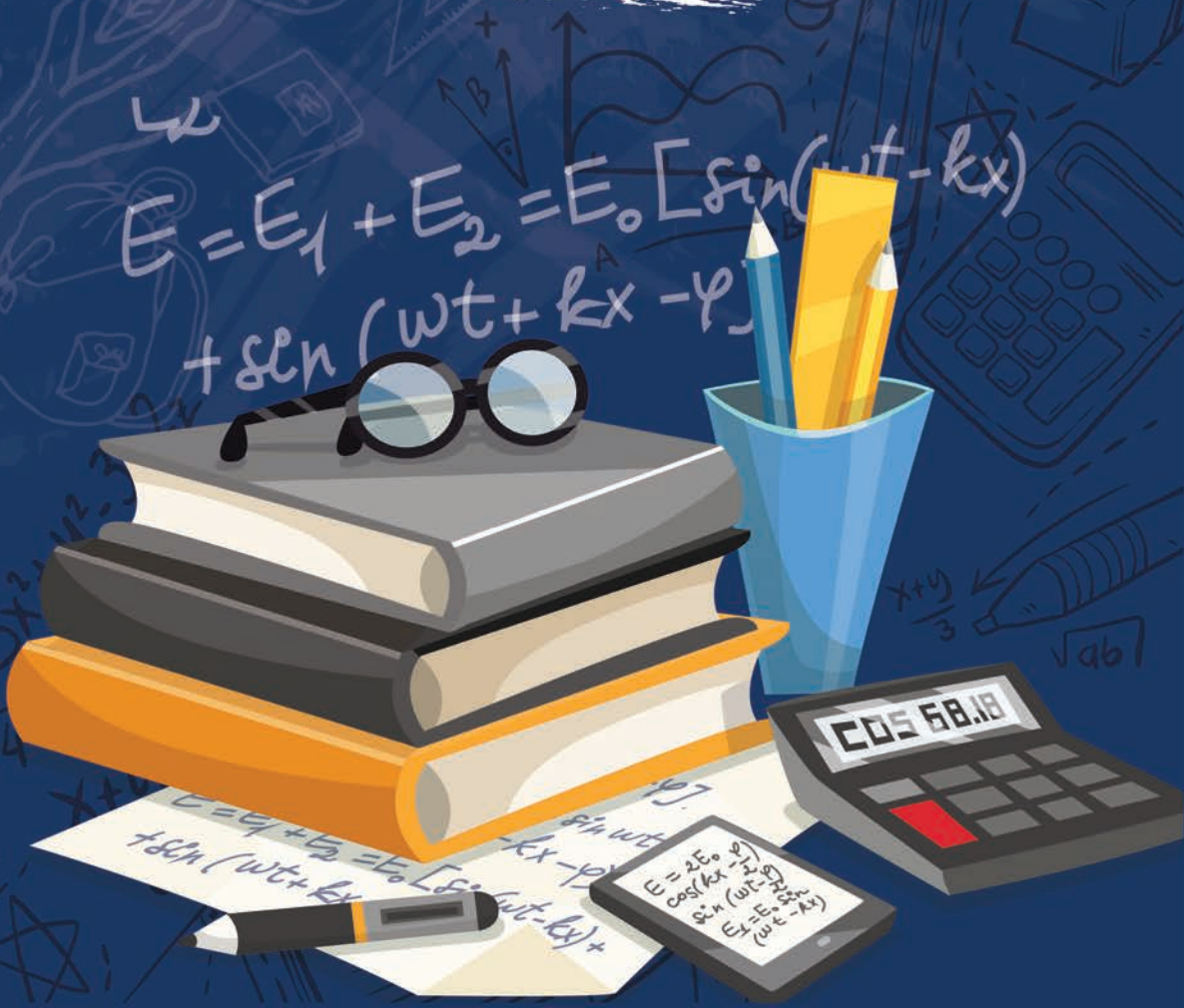


Tatjana Atanasova – Paçemska  
Zoran Trifunov

# MATEMATİK

»»»» sınıf **IV**

Dört Yıllık Mesleki Lise eğitiminin



**Tatjana Atanasova - Paçemska**  
**Zoran Trifunov**

# **MATEMATİK**

## **SINIF IV**

### **ORTA MESLEKİ EĞİTİM**

---

Meslekler:

Jeoloji - Madencilik ve Metalurji / Jeoloji, Madencilik ve Metalurji, İnşaat - Jeodezi / İnşaat ve Jeodezi, Elektrik Mühendisliği / Elektrik Mühendisliği, Makine Mühendisliği / Makine Mühendisliği, Ulaşım / Ulaşım, Taşıma ve Depolama, Tekstil - Deri / Tekstil, Deri ve Benzeri Ürünler ve Kimya - Teknoloji / Kimya ve Teknoloji, Orta Mesleki Eğitim

## MATEMATİK

### Sınıf IV

#### ORTA MESLEKİ EĞİTİM

##### Meslekler:

Jeoloji - Madencilik ve Metalurji / Jeoloji, Madencilik ve Metalurji, İnşaat - Jeodezi / İnşaat ve Jeodezi, Elektrik Mühendisliği / Elektrik Mühendisliği, Makine Mühendisliği / Makine Mühendisliği, Ulaşım / Ulaşım, Taşıma ve Depolama, Tekstil - Deri / Tekstil, Deri ve Benzeri Ürünler ve Kimya - Teknoloji / Kimya ve Teknoloji, Orta Mesleki Eğitim

##### Yazarlar:

Tatjana Atanasova - Paçemska

Zoran Trifunov

##### İnceleyenler:

Beti Andonoviç

Vilma Ilievska

Mira Taškova

##### İllüstratör:

Tatjana Atanasova - Paçemska

Zoran Trifunov

##### Orijinal baskının başlığı:

МАТЕМАТИКА за IV година

Средно стручно образование

Струки: Геолошко-рударска и металуршка/Геологија, рударство и металургија, Градежно-геодетска/ Градежништво и геодезија, Електротехничка/Електротехника, Машинска/Машинство, Сообраќајна/ Сообраќај, транспорт и складирање, Текстилно-кожарска/ Текстил, Кожа и слични производи и Хемиско технолошка/Хемија и технологија, средно стручно образование

Tatjana Atanasova-Paçemska

Zoran Trifunov

##### Grafik Tasarım ve Teknik Düzenleme: Trimaks – Üsküp

##### Makedonca'dan Türkçe'ye çeviri: Abdülgani Ali

##### Lektör: İbrahim Yusuf

##### Mesleki redaksiyon: Aybeyan Selim

##### Editör: İlker Ali

##### Grafik ve teknik düzenleme: Vladimir Mladenovski, Vesna Depinovska - ARS STUDIO

##### Yayımcı: Kuzey Makedonya Cumhuriyeti Eğitim ve Bilim Bakanlığı,

"Az. Kiril ve Metodiy" Sok. no.54, 1000 Üsküp

##### Yayın yeri ve yılı: Üsküp, 2025

8. 04. 2024 tarihli 26-576/1 sayılı kararla, Ulusal Ders Kitapları Komisyonu, IV. sınıflar için Matematik ders kitabı olarak kabul etmiştir. MESLEK / SEKTÖR: Jeoloji - Madencilik ve Metalurji / Jeoloji, Madencilik ve Metalurji, İnşaat - Jeodezi / İnşaat ve Jeodezi, Elektrik Mühendisliği / Elektrik Mühendisliği, Makine Mühendisliği / Makine Mühendisliği, Ulaşım / Ulaşım, Taşıma ve Depolama, Tekstil - Deri / Tekstil, Deri ve Benzeri Ürünler ve Kimya - Teknoloji / Kimya ve Teknoloji, Orta Mesleki Dört Yıllık Eğitim için onaylamıştır.

# MATEMATİK

## SINIF IV

**Tatjana Atanasova – Paçemska**  
**Zoran Trifunov**



# İÇİNDEKİLER

|            |   |
|------------|---|
| ÖNSÖZ..... | 7 |
|------------|---|

## **MODÜLER BİRİM 1. DİZİLER**

|                                                          |    |
|----------------------------------------------------------|----|
| 1. GERÇEL SAYI DİZİLERİNİN TANIMI VE ÖZELLİKLERİ .....   | 9  |
| 2. ARİTMETİK DİZİ .....                                  | 18 |
| 3. ARİTMETİK DİZİNİN İLK $N$ - TERİMİNİN TOPLAMI .....   | 23 |
| 4. GEOMETRİK İDİZİLER .....                              | 27 |
| 5. GEOMETRİK DİZİLERİN İLK $N$ - TERİMİNİN TOPLAMI.....  | 32 |
| 6. DİZİNİN LİMİT DEĞERİ .....                            | 37 |
| 7. YAKINSAK DİZİLERLE İŞLEMLER .....                     | 47 |
| 8. SONSUZ GEOMETRİK DİZİLERİN TERİMLERİNİN TOPLAMI ..... | 55 |
| TEKRARLAMA VE PRATİK UYGULAMA ALIŞTIRMALARI .....        | 61 |

## **MODÜLER BİRİM 2. TEMEL FONKSİYONLAR**

|                                                         |     |
|---------------------------------------------------------|-----|
| 1. FONKSİYON KAVRAMI .....                              | 64  |
| 1.1. Fonksiyonun Tanım Kümesi.....                      | 65  |
| 1.1.1. Polinom Fonksiyonunun Tanım Kümesi .....         | 66  |
| 1.1.2. Kök Üssü Çift Olan Fonksiyonun Tanım Kümesi..... | 66  |
| 1.1.3. Rasyonel Fonksiyonun Tanım Kümesi.....           | 67  |
| 1.1.4. Logaritmik Fonksiyonun Tanım Kümesi .....        | 68  |
| 1.2. Fonksiyonun Sıfırları .....                        | 69  |
| 1.3. Çift ve Tek Fonksiyonlar .....                     | 71  |
| 1.4. Sınırlı Fonksiyonlar .....                         | 73  |
| 1.5. Monoton Fonksiyonlar.....                          | 74  |
| 2. DOĞRUSAL FONKSİYON .....                             | 79  |
| 3. İKİNCİ DERECE FONKSİYON.....                         | 84  |
| 4. KUVVET FONKSİYONU .....                              | 90  |
| 4.1. Doğal Üslü Kuvvet Fonksiyonu .....                 | 90  |
| 4.2. Rasyonel Üslü Kuvvet Fonksiyonu .....              | 92  |
| 5. ÜSTEL FONKSİYON .....                                | 98  |
| 6. LOGARİTMİK FONKSİYON .....                           | 100 |
| 7. TERS FONKSİYON KAVRAMI .....                         | 102 |
| 8. TEMEL TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR .....               | 105 |
| TEKRARLAMA VE PRATİK UYGULAMA ALIŞTIRMALARI .....       | 108 |

## **MODÜLER BİRİM 3. FONKSİYONUN LİMİT DEĞERİ**

|                                                       |     |
|-------------------------------------------------------|-----|
| 1. FONKSİYONUN LİMİT DEĞERİ KAVRAMI.....              | 112 |
| Fonksiyonun Limiti .....                              | 112 |
| Değişken Sonsuza Yaklaşırken Fonksiyonun Limiti ..... | 115 |

|                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Sol ve sağ limit değerleri</i> .....                                           | 116 |
| <i>Fonksiyonların limit özellikler</i> .....                                      | 121 |
| 2. FONKSİYONUN SÜREKLİLİĞİ .....                                                  | 130 |
| 3. EĞRİLERİN ASİMPOTLARI .....                                                    | 144 |
| 4. TEMEL FONKSİYONLARIN LİMITLERİ. TEMEL FONKSİYON GRAFİKLERİNİN ASİMPOTLARI..... | 152 |
| <i>Doğrusal fonksiyon</i> .....                                                   | 152 |
| <i>İkinci derece fonksiyon</i> .....                                              | 153 |
| <i>Kuvvet Fonksiyonu</i> .....                                                    | 155 |
| <i>Üstel fonksiyon</i> .....                                                      | 156 |
| <i>Logaritmik fonksiyon</i> .....                                                 | 157 |
| 5. ÖZEL LİMIT DEĞERLERİ .....                                                     | 158 |
| TEKRARLAMA VE PRATİK UYGULAMA ALIŞTIRMALARI .....                                 | 163 |

#### **MODÜLER ÜNİTE 4. FONKSİYONUN TÜREVİ**

|                                                                                                |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. BİR NOKTADA FONKSİYONUN TÜREVİNİN TANIMI .....                                              | 167 |
| 2. TEMEL FONKSİYONLARIN TÜREVİNİ BELİRLEME .....                                               | 173 |
| 3. TOPLAM, FARK, ÇARPIM VE BÖLÜMÜN TÜREVİ .....                                                | 180 |
| <i>Fonksiyonların Toplam ve Farkının Türevi</i> .....                                          | 180 |
| <i>Sabit Bir Fonksiyonun Çarpımının Türevi</i> .....                                           | 181 |
| <i>Fonksiyonların Çarpımının Türevi</i> .....                                                  | 181 |
| <i>Fonksiyonların Bölümünün Türevi</i> .....                                                   | 183 |
| 4. BİLEŞKE FONKSİYONUN TÜREVİ .....                                                            | 187 |
| 5. LOGARİTMİK TÜREVLER .....                                                                   | 193 |
| 6. TÜREVLERİN UYGULANMASI. FONKSİYONUN TEĞET VE NORMALİNİN DENKLEMİ.....                       | 199 |
| <i>Yüksek Mertebeden Türev</i> .....                                                           | 199 |
| <i>Teğet Denklemi</i> .....                                                                    | 200 |
| <i>Normal Denklemi</i> .....                                                                   | 204 |
| 7. FİZİKTE TÜREV UYGULAMASI .....                                                              | 208 |
| 8. TÜREV UYGULAMASI. FONKSİYONUN DEĞİŞİMİ VE GRAFİĞİNİ İNCELENMESİ.....                        | 211 |
| <i>Fonksiyonun Monotonluğunu İnceleme</i> .....                                                | 211 |
| <i>Fonksiyonun Ekstrem Değerlerini İnceleme</i> .....                                          | 216 |
| <i>Fonksiyonun Dışbükeyliğini ve İçbükeyliğini İnceleme. Fonksiyonun Dönüm Noktaları</i> ..... | 224 |
| <i>Fonksiyonun Değişiminin İncelemesi ve Grafiğinin Çizimi</i> .....                           | 227 |
| 9. EKSTREMUM PROBLEMLERİNİ ÇÖZMEK İÇİN TÜREV UYGULAMASI .....                                  | 241 |
| TEKRARLAMA VE PRATİK UYGULAMA ALIŞTIRMALARI .....                                              | 253 |

|                   |     |
|-------------------|-----|
| EK: TESTLER ..... | 255 |
|-------------------|-----|

|                           |     |
|---------------------------|-----|
| SORULARIN ÇÖZÜMLERİ ..... | 264 |
|---------------------------|-----|



## ÖNSÖZ

“Matematik” ders kitabı, Jeoloji-Madencilik ve Metalurji / Jeoloji, Madencilik ve Metalurji, İnşaat-Jeodezi / İnşaat ve Jeodezi, Elektroteknik / Elektroteknik, Makine / Makine, Ulaşım / Ulaşım, Taşıma ve Depolama, Tekstil-Deri / Tekstil, Deri ve Benzeri Ürünler ve Kimyasal Teknoloji / Kimya ve Teknoloji gibi mesleklerdeki IV. sınıf orta mesleki eğitim zorunlu Matematik dersi öğretim programına göre yazılmıştır.

Kitap, belirtilen mesleki profillerin şekillenmesinde gerekli olan modern matematik biliminin temel teorilerini ve kavramlarını ele almaktadır. Teorik ve pratik açıdan, 4 farklı modüler üniteye içerikler ele alınmıştır: diziler, temel reel fonksiyonlar, bir reel değişkenli fonksiyonların limiti ve fonksiyonun türevi (diferansiyel hesabın temelleri), teori ve pratikte en gerekli ve en çok kullanılan konular olarak.

Reel fonksiyonların ele alınmasına özel önem verilmiştir, burada her matematiksel kavram, teori ve pratikteki ilgili mesleki bir kavramla ilişkilendirilmiştir, bu da öğrencilerin matematiksel yöntem ve araçların farklı analiz ve araştırmalardan elde edilen sonuçların yorumlanmasındaki uygulamalarına yaklaşması beklenmektedir.

Kitap, öğrencilerin teknik bağlamda matematiksel problemleri çözme yöntem ve tekniklerinde ustalaşmalarına yardımcı olacak yeterli sayıda çözülmüş örnek içermektedir. Örnekler, genellikle açık kaynaklı GEOGEBRA yazılım paketinde çizilen grafiksel gösterimlerle desteklenmektedir. Kitap, kısmen veya tamamen çözülmemiş ve öğrencilerin öğretim materyalinde ustalaşmada ve öğrenme sonuçlarına ulaşmada daha fazla başarı, verimlilik ve etkinlik elde etmek amacıyla bağımsız çalışmaları için tasarlanmış problemleri de içermektedir.

Bu ders kitabında, yazarlar tarafından oluşturulan aletlere (etkileşimli dijital çizimler) dijital kaynaklara doğrudan erişim sağlamak için bir başlangıç girişi yapılmıştır.



QR kodlarını akıllı telefonunuzla tarayın veya görsel sunum veya çizim için özel olarak oluşturulmuş aletlere doğrudan erişmek için etkin bağlantıları doğrudan bilgisayarınıza girin.

Bu ders kitabının hazırlanmasında, öneri ve yorumlarıyla el yazmasının kalitesinin artmasına katkıda bulunan denetleyenlerin özel bir payı vardır ve bu nedenle onlara özel teşekkürlerimizi sunuyoruz.

Ders kitabının teknik mesleklerdeki öğrenciler ve matematik dersini diğer mesleklerde okuyan diğer öğrenciler tarafından kullanılacağını ve edinilen bilgilerin özellikle doğa bilimleri-matematik ve teknik-teknolojik alanlardaki çalışma programlarında eğitimlerine devam etmeleri için uygun bir temel olacağını umuyoruz.

**Yazarlardan**

## MODÜLER ÜNİTE 1

### DİZİLER

Bu modüler ünite de şunları öğreneceksiniz:

Dizi kavramı

Aritmetik diziler

Genel terim. İlk  $n$  terimin toplamı

Aritmetik dizilerin temel özellikleri. İnterpolasyon.

Geometrik diziler

Genel terim. İlk  $n$  terimin toplamı

Geometrik dizinin temel özellikleri. İnterpolasyon.

Yakınsak ve ıraksak diziler

Yakınsak dizinin limiti

Sonsuz geometrik dizinin terimleri toplamı

## GERÇEK SAYI DİZİLERİ

### 1. GERÇEK SAYI DİZİLERİNİN TANIMI VE ÖZELLİKLERİ

#### GİRİŞ

Günlük hayatta sık sık bazı nesneleri, kavramları veya sayıları belirli bir kurala veya düzene göre mantıksal ve yönlendirilmiş bir sırayla düzenlemeye ihtiyaç duyarız. Bu tür bir düzenlemede, elemanlar bir dizide sıralanır. Her elemanın bu dizide kesin olarak belirlenmiş bir yeri vardır.

**Örnek 1.** Dizilere ait örnekler.

a) Milattan önce ikinci yüzyıldan beri kullanılan Yunan harfleri bir dizide sıralanmıştır. İlk sırada  $\alpha$ , ikinci sırada  $\beta$ , vb. ve son sırada, yani yirmi dördüncü sırada  $\omega$  bulunur. 1'e  $\alpha$  harfinin, 2'ye  $\beta$  harfinin ve son olarak 24'e  $\omega$  harfinin karşılık geldiğini yazabiliriz.  $\alpha, \beta, \dots, \omega$  dizisini elde ederiz.

b) Her doğal sayıya 2 sayısının kuvvetini karşılık getirirsek, yani 1'e  $2^1$ , 2'ye  $2^2$ , ..., n'ye  $2^n$ , ... karşılık getirirsek, 2 sayısının kuvvetlerinden oluşan bir dizi elde ederiz.  $2^1, 2^2, \dots, 2^n, \dots$  dizisini elde ederiz.

**Tanım:**  $(N)$  doğal sayılar kümesinden  $(R)$  gerçel sayılar kümesine her  $f : N \rightarrow R$  fonksiyona gerçel sayı dizisi denir.

**Örnek 2.** Her doğal sayıya karesini karşılık getiren bir dizi yazınız.

#### Çözüm:

Dizi elemanlarını daha kolay belirtmek için fonksiyon kullanacağız.

$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$  ve  $f(x) = x^2$  olsun, dizi elemanlarını elde edeceğimiz fonksiyon.

$$f(1) = 1^2 = 1, \quad f(2) = 2^2 = 4, \quad f(3) = 3^2 = 9, \quad \dots \quad f(n) = n^2 \quad \dots$$

$1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$  gerçel sayı dizisini elde ettik.

Fonksiyonu  $a : N \rightarrow R$  olarak belirtirsek, dizi elemanlarını elemanın sıra numarasına göre  $a$  ve bir indeks ile belirtebiliriz. Verilen örnekte şunu yazabiliriz:

$$f(1) = a_1 = 1^2 = 1, \quad f(2) = a_2 = 2^2 = 4, \quad f(3) = a_3 = 3^2 = 9, \quad \dots \quad f(n) = a_n = n^2, \quad \dots$$



$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  sayılarına dizinin terimleri denir. Dizi kısaca  $(a_n)$  sembolü ile gösterilir.

$a_1$  ilk terim,  $a_2$  ikinci terim,  $a_3$  üçüncü terim,  $a_n$  dizinin  **$n$ -inci terimidir.**

$a_n$  sayısına dizinin **genel terimi** denir indisi ise, o terimin dizideki sıra numarasını temsil eder.

Genel terim  $a_n$  'yi elde etme kuralını biliyorsak diziye tamamen bellidir denir.

**Örnek 3.** Genel terimi  $a_n = \frac{1}{n+1}$  olan dizinin ilk 5 terimini yazınız.

**Çözüm:**

$$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}, \quad a_3 = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}, \quad a_4 = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{5}, \quad a_5 = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{6}$$

O halde, gerçek sayı dizisinin terimleri:  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{n+1}, \dots$  dir.

**Örnek 4.** a) Genel terimi  $a_n = 3n + 1$ ,  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  olan diziye yazınız.

b) Genel terimi  $b_n = 3n + 1$ ,  $n \in \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$  olan diziye yazınız.

**Çözüm:**

a)

$$a_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$a_2 = 3 \cdot 2 + 1 = 6 + 1 = 7$$

$$a_3 = 3 \cdot 3 + 1 = 9 + 1 = 10$$

$$a_4 = 3 \cdot 4 + 1 = 12 + 1 = 13$$

$$a_5 = 3 \cdot 5 + 1 = 15 + 1 = 16$$

b)

$$b_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$b_2 = 3 \cdot 2 + 1 = 6 + 1 = 7$$

$$b_3 = 3 \cdot 3 + 1 = 9 + 1 = 10$$

...

$$b_n = 3 \cdot n + 1$$

...

a) 4, 7, 10, 13, 16 gerçek sayı dizisinin 5 terimi vardır. Bu dizi sonlu sayıda terime sahip dizi (sonlu dizi) olarak adlandırılır.

b) 4, 7, 10, 13, 16, ...,  $3n + 1$ , ... gerçek sayı dizisinin sonsuz sayıda terimi vardır. Bu nedenle bu diziye sonsuz dizi denir.

$(a_n)$  dizisini, sütun A ve B'yi tablo görünümünde kullanarak GeoGebra'da temsil edebiliriz; burada sütun A'da terimin sıra numarası ve sütun B'de dizinin genel terim formülü yazılır ve n'nin değeri A1 alanında değiştirilmelidir. Formülün kopyalanmasıyla dizinin diğer terimleri elde edilir.

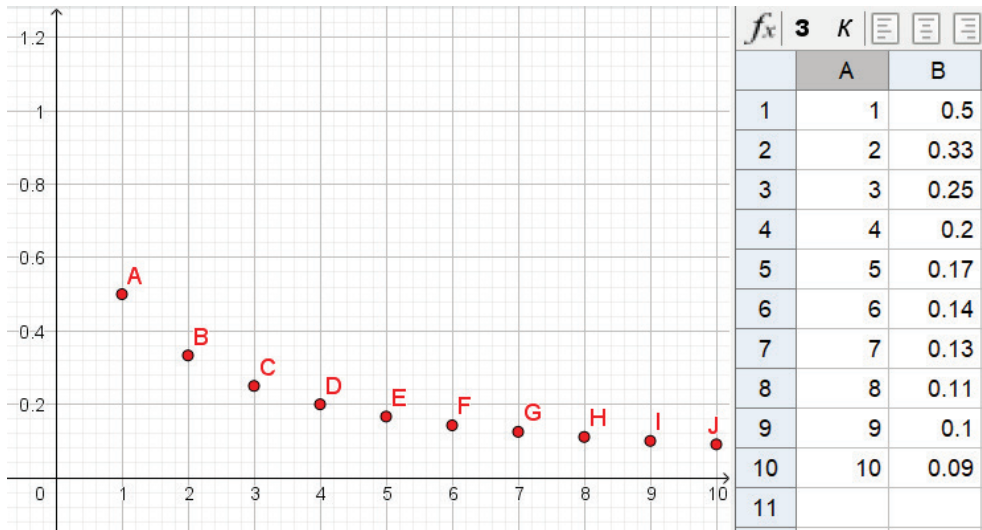
Örneğin, genel terimi  $a_n = 3n + 1$  olan bir dizi verilmiş olsun. C sütununda dizinin ilk 5 terimi yazılmıştır.

|   | A | B           | C |
|---|---|-------------|---|
| 1 | 1 | $=3*A1 + 1$ |   |
| 2 | 2 |             |   |
| 3 | 3 |             |   |
| 4 | 4 |             |   |
| 5 |   |             |   |
| 6 |   |             |   |

|   | A | B  | C |
|---|---|----|---|
| 1 | 1 | 4  |   |
| 2 | 2 | 7  |   |
| 3 | 3 | 10 |   |
| 4 | 4 | 13 |   |
| 5 | 5 | 16 |   |
| 6 |   |    |   |

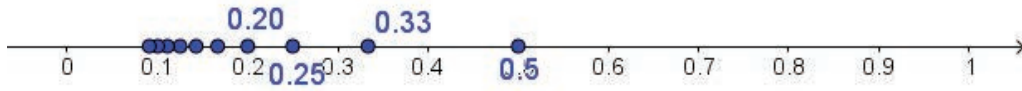
$(a_n)$  dizisi,  $N$  kümesinden  $R$  kümesine bir fonksiyon olarak, koordinat düzleminde grafiksel olarak gösterilebilir. Bu durumda,  $x$ -eksenine  $n$  sıra numarası ve  $y$ -eksenine  $a_n$  değeri uygulanır. Örneğin, ilk terime  $(1, a_1)$  noktası, ikinci terime  $(2, a_2)$  noktası vb. karşılık gelir.

Örneğin, genel terimi  $a_n = \frac{1}{n+1}$  olan bir dizi verilsin. İlk olarak, A ve B sütunlarında terimlerin sıra numaralarını ve değerlerini elde ediyoruz. GeoGebra'daki "Nokta Listesi Oluştur" komutu ve doldurulmuş A ve B sütunlarının seçilmesiyle, dizi geometrik pencerede grafiksel olarak temsil edilir.



Sadece dizinin terimlerini grafiksel olarak göstermek istersek, bunlar sayı eksenindeki noktalardır.

Örneğin, genel terimi  $a_n = \frac{1}{n+1}$  olan dizi, dizinin her teriminin değeri ayrı bir nokta olarak temsil edildiği  $x$  eksenindeki noktalarla temsil edilir.



Örnek 5.  $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \frac{25}{6}, \dots$  dizisi verilmiştir. Deneme ve kontrol ile genel terimini belirtiniz.

**Çözüm:** Dizinin genel terimi  $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ , çünkü paydadaki terimin sıra numarasına 1 katılmış, payında ise sıra numarasının karesi olduğunu görüyoruz.

Gerçek sayılardan oluşan dizilerin bazı karakteristik özelliklerini belirlemek için birkaç dizi örneğine bakalım.

Örnek 6. Genel terimleri ile şu diziler verilmiştir:

a)  $a_n = \frac{2n}{n+1}$

b)  $a_n = \frac{1}{n+1}$

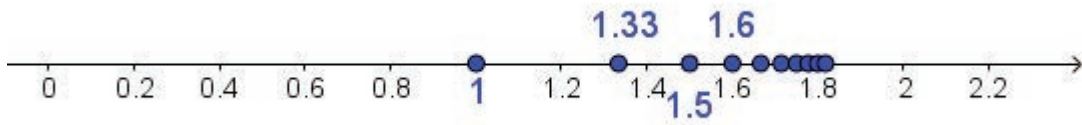
c)  $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

ç)  $a_n = 2$

Dizinin ilk beş terimini yazınız, sayı doğrusu üzerinde gösteriniz ve ardışık terimlerin  $a_1 - a_2, a_2 - a_3, \dots, a_n - a_{n+1}$  için  $n \in \mathbb{N}$  farkını belirtiniz.

**Çözüm:**

a) Dizinin terimleri:  $1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \dots$  veya yaklaşık değerlerle yazıldığında: 1, 1.33, 1.5, 1.6, 1.67, ... elde edilir.



$$a_1 - a_2 = 1 - \frac{4}{3} = \frac{3-4}{3} = -\frac{1}{3} < 0. \text{ Buradan } a_1 - a_2 < 0 \text{ elde edilir.}$$

$$a_2 - a_3 = \frac{4}{3} - \frac{3}{2} = \frac{8-9}{6} = -\frac{1}{6} < 0. \text{ Buradan } a_2 - a_3 < 0 \text{ elde edilir.}$$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{2n}{n+1} - \frac{2n+2}{n+2} = \frac{2n^2 + 4n - 2n^2 - 2n - 2n - 2}{(n+1)(n+2)} = -\frac{2}{(n+1)(n+2)} < 0.$$

Buradan da  $a_n - a_{n+1} < 0$ , yani  $a_n < a_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  elde edilir.

Genel terimi  $a_n = \frac{2n}{n+1}$  olan dizi için, dizinin arttığını söyleriz.

b) Dizinin terimleri şu sayılardır:  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$  veya yaklaşık değerlerle yazarsak: 0.5, 0.33, 0.25, 0.2, 0.17, ...elde edilir.



$$a_1 - a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6} > 0. \text{ Buradan } a_1 - a_2 > 0 \text{ elde edilir.}$$

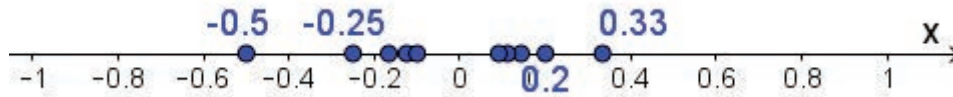
$$a_2 - a_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12} > 0. \text{ Buradan } a_2 - a_3 > 0 \text{ elde edilir.}$$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{n+2-n-1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

Buradan da  $a_n - a_{n+1} > 0$ , yani  $a_n > a_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  elde edilir.

Genel terimi  $a_n = \frac{1}{n+1}$  olan dizi için, dizinin **azaldığını** söyleriz.

c) Dizinin terimleri şunlardır:  $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots$  veya yaklaşık değerlerle yazarsak: -0.5, 0.33, -0.25, 0.2, -0.17, ...elde edilir.



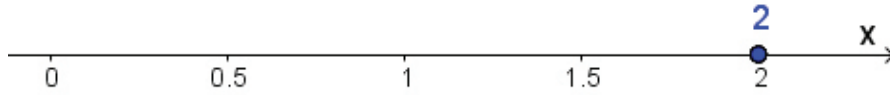
$$a_1 - a_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{-3-2}{6} = -\frac{5}{6} < 0. \text{ Buradan } a_1 - a_2 < 0 \text{ elde edilir.}$$

$$a_2 - a_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12} > 0. \text{ Buradan } a_2 - a_3 > 0 \text{ elde edilir.}$$

Buradan,  $n \in \mathbb{N}$  değerine bağlı olarak farkın işaretinin değiştiğini elde ederiz.

Genel terimi  $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$  olan dizi için, dizinin **ne arttığını ne de azaldığını** söyleriz.

d) Dizinin terimleri: 2, 2, 2, 2, 2, ...dir.



$a_1 - a_2 = 2 - 2 = 0$ . Buradan  $a_1 - a_2 = 0$  elde ederiz.

$a_2 - a_3 = 2 - 2 = 0$ . Buradan  $a_2 - a_3 = 0$  elde ederiz.

$a_n - a_{n+1} = 2 - 2 = 0$ . Buradan  $a_n - a_{n+1} = 0$ , yani  $a_n = a_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  elde ederiz.

Genel terimi  $a_n = 2$  olan dizi için, **sabit dizi** olduğunu söyleriz.

Bir dizinin artma/azalma özelliği, **monotonluk özelliği** olarak adlandırılır ve diziye **monoton dizi** denir.

#### Tanım:

Eğer her  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n < a_{n+1}$ , ( $a_n - a_{n+1} < 0$ ) ise,  $(a_n)$  dizisi monoton olarak **artandır**, yani  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots$

Eğer her  $n \in \mathbb{N}$  için  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n > a_{n+1}$ , ( $a_n - a_{n+1} > 0$ ) ise,  $(a_n)$  dizisi monoton olarak **azalandır**, yani  $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots$

Eğer her  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \leq a_{n+1}$ , ( $a_n - a_{n+1} \leq 0$ ) ise,  $(a_n)$  dizisi **azalmayan** dizidir.

Eğer her  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \geq a_{n+1}$ , ( $a_n - a_{n+1} \geq 0$ ) ise,  $(a_n)$  dizisi **artmayan** dizidir.

**Örnek 7.**  $a_n = \frac{n+1}{n+2}$  dizisinin monotonluğunu inceleyiniz.

#### Çözüm:

Bir dizinin monotonluğunu incelemek için, öncelikle dizinin birkaç terimini yazmamız gerekir:

$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$  ve ardından komşu (ardışık) terimlerin birkaç farkının işaretini belirlememiz gere-

kir:  $a_1 - a_2, a_2 - a_3, \dots$

$$a_1 - a_2 = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{12} < 0, \quad a_2 - a_3 = \frac{3}{4} - \frac{4}{5} = -\frac{1}{20} < 0, \dots$$

Dizinin ilk birkaç terimi arasındaki farkın işareti değişmiyor, ancak monotonluğu incelemek için,  $n$ 'inci ve  $(n+1)$ 'inci terim arasındaki farkın genel olarak geçerli olup olmadığını belirlememiz gerekir.

$a_n - a_{n+1}$  farkının değerini belirleyelim:

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \frac{n+1}{n+2} - \frac{n+2}{n+3} = \frac{(n+1)(n+3) - (n+2)^2}{(n+2)(n+3)} = \\ &= \frac{(n^2 + 4n + 3) - (n^2 + 4n + 4)}{(n+2)(n+3)} = \frac{n^2 + 4n + 3 - n^2 - 4n - 4}{(n+2)(n+3)} = -\frac{1}{(n+2)(n+3)} < 0, \end{aligned}$$

Buradan  $a_n - a_{n+1} < 0$  elde ederiz. Dizinin monotonluğu tanımına göre dizi monoton olarak artandır.

Örnek 6'da c)  $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$  olarak verilen dizinin terimlerini sayı doğrusunda incelersek, hepsinin  $(-1, 1)$  aralığında olduğunu görebiliriz. Bu, her  $n \in \mathbb{N}$  için  $-1 < a_n < 1$  olarak yazılabilir.

**Tanım:**  $(a_n)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  dizisi için:

Her  $n$  doğal sayısı için,  $a_n \leq M$  olacak şekilde bir  $M$  reel sayısı varsa, dizi **üstten sınırlıdır**.

Her  $n$  doğal sayısı için  $a_n \geq m$  olacak şekilde bir  $m$  reel sayısı varsa, dizi **alttan sınırlıdır**.

Hem yukarıdan hem de aşağıdan sınırlı olan dizi, yani her  $n$  doğal sayısı için  $m \leq a_n \leq M$  olacak şekilde  $m$  ve  $M$  reel sayıları varsa, diziye **sınırlıdır** denir.

Dizinin sınırlılık tanımı, dizinin terimlerinin mutlak değeri ile de ifade edilebilir.

**Tanım:**  $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  kümesi sınırlıysa, yani her  $n \in \mathbb{N}$  için  $|a_n| \leq A$  olacak şekilde bir  $A > 0$  reel sayısı varsa,  $(a_n)$  dizisi **sınırlıdır**.

Örnek 8.  $a_n = 3 - n^2$  genel terimli dizinin  $M = 2$  sayısı ile üstten sınırlı olduğunu ispatlayalım.

**Çözüm:**

$a_n \leq 2$ , yani  $3 - n^2 \leq 2$  olduğunu ispatlamamız gerekir.

Bilinen eşitsizlikten başlayacağız.  $n \in \mathbb{N}$  doğal sayı olsun, o zaman:

$$\begin{array}{ll} n \geq 1 & -n^2 \leq -1 \quad / +3 \\ n^2 \geq 1^2 & 3 - n^2 \leq 3 - 1 \\ n^2 \geq 1 \quad / \cdot (-1) & 3 - n^2 \leq 2 \end{array}$$

$a_n \leq 2$  olduğunu elde ettik. Dizinin 2 sayısı ile üstten sınırlı olduğunu kanıtladık.

**Örnek 9.** Aşağıdaki dizilerin sınırlılığını inceleyiniz:

$$\text{a) } a_n = \frac{1}{2n} \quad \text{b) } a_n = \frac{3n+1}{6n+5} \quad \text{c) } a_n = \frac{4n+3}{4n+5} \quad \text{ç) } 0,5; 0,51; 0,511; 0,5111; \dots$$

**Çözüm:**

a) Dizilerin sınırlılığını incelemek için, dizilerin sınırlılığı tanımına göre:

Her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $|a_n| = \left| \frac{1}{2n} \right| = \frac{1}{2n} \leq 1$  veya başka bir deyişle, dizinin sınırlılığını genel terimi verilen dizinin birkaç terimini yazarak da görebiliriz.

Dizinin ilk birkaç terimi şunlardır:  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots$ , görüldüğü gibi bunlar değeri azalan kesirlerdir ve en büyük değer 1 ile sınırlanabilir.

b) Her  $n \in \mathbb{N}$  için:

$$|a_n| = \left| \frac{3n+1}{6n+5} \right| = \left| \frac{6n+5-3n-4}{6n+5} \right| = \left| \frac{6n+5-(3n+4)}{6n+5} \right| = \left| \frac{6n+5}{6n+5} - \frac{3n+4}{6n+5} \right| = \left| 1 - \frac{3n+4}{6n+5} \right| \leq 1$$

Tanıma göre, dizinin sınırlı olduğu sonucu elde edilir.

c) Her  $n \in \mathbb{N}$  için:

$$|a_n| = \left| \frac{4n+3}{4n+5} \right| = \left| \frac{4n+5-2}{4n+5} \right| = \left| \frac{4n+5}{4n+5} - \frac{2}{4n+5} \right| = \left| 1 - \frac{2}{4n+5} \right| \leq 1$$

Dizinin sınırlı olduğu sonucu elde edilir.

ç) Her  $n \in \mathbb{N}$  için:

$$|a_n| = \left| \frac{5}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^n} \right| = \frac{5}{10} + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{5}{10} + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{10^{n-1}}}{\frac{9}{10}} =$$

$$= \frac{5}{10} + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{10 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^{n-1}}\right)}{9} = \frac{5}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{10^{n-1}}\right)}{9} \leq \frac{5}{10} + \frac{1}{90} = \frac{46}{90} = \frac{23}{45}$$

Buna göre, dizinin sınırlı olduğu sonucu elde edilir.

### Alıştırma Soruları:

1. Genel terimi verilmiş olan dizinin ilk beş terimini bulunuz:

a)  $a_n = \frac{2n}{1+n^2}$       b)  $a_n = (-1)^n$       c)  $a_n = 2^n$       d)  $a_n = \frac{1}{n!}$

2. Monoton artan iki dizi yazınız.

3. Monoton azalan iki dizi yazınız.

4. Verilen dizilerin genel terimini bulunuz:

a) 1, 4, 9, 16, 25, ...      b) 1, 3, 7, 15, 31, ...      c) 1, -1, 1, -1, 1, ...      d)  $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

Genel terimi verilen dizilerin monotonluğunu ve sınırlılığını belirtiniz:

5.  $a_n = \frac{1}{3^n}$

6.  $a_n = \frac{n}{n+3}$

7.  $a_n = \frac{n^2}{n^2-5}$

8.  $a_n = \frac{n}{e^n}$

9. Genel terimi verilen dizilerin monotonluğunu inceleyin:

a)  $a_n = \frac{3n-1}{n^2}$       b)  $a_n = \frac{2-n}{3^n}$       c)  $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$       d)  $a_n = \sqrt{n} - 2n$       e)  $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

10. Aşağıdaki dizilerden hangisi sınırlıdır:

a)  $a_n = \frac{5n}{3n+2}$       b)  $a_n = 2n + (-1)^n$       c)  $a_n = \frac{(-1)^n \cdot n^2}{2}$       d)  $a_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$       e)  $a_n = \frac{3^n + 2}{3^n}$



## 2. ARİTMETİK DİZİLER

Bir basketbol maçının ilk çeyreğinde ev sahibi takım 21 sayı attı ve bunu şu şekilde yaptı, önce serbest atıştan 1 sayı attı ve ardından geri kalan basketleri “reket”ten attı. Ev sahibi takımın sayılarının yanındaki skorboardda sırayla şu sayılar yazıyordu: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21.

Bu kayıt neyi temsil ediyor?

Bu kayıt bir sayı dizisini temsil ediyor.

İkinci terimden başlayarak iki komşu terimin (her terim ve önceki terimi) farkı belirlenebilir mi?

Evet, iki komşu terimin farkı belirlenebilir ve 2’dir.

**Örnek 1.** Şu diziler verilmiştir:

a) 3, 4, 5, 6, 7, ...   b) 2, 1, 0, -1, -2, ...   c)  $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{13}{2}, \frac{17}{2}, \dots$    ç) 11, 6, 1, -4, -9, ...   d) 2, 2, 2, 2, 2, ...

İkinci terimden başlayarak her terim ile önceki terimi arasındaki farkı belirleyiniz.

**Çözüm:**

İkinci terimden başlayarak her terim ile önceki terimi arasındaki farkın sabit olduğu ve şu değerlere sahip olduğu görülebilir:

a) 1,                      b) -1,                      c) 2,                      ç) -5,                      d) 0.

**Tanım:** İkinci terimden başlayarak her terim ile önceki terimi arasındaki farkın sabit bir sayı  $d$  olduğu  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$  dizisine aritmetik dizi denir.

$a_{n+1} - a_n = d$ , her  $n \in \mathbb{N}$  için.

**Örnek 2.** 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... dizisi için genel terimi ve her terim ile önceki terimi arasındaki farkı belirtiniz. Bu dizinin adı nedir?

Her terim ile önceki terimi arasındaki farkı belirleyiniz. Dizinin adı nedir?

**Çözüm:** Dizinin genel terimi  $a_n = 2n - 1$ ’dir.

Ondan sonra iki komşu terim arasındaki farkı belirtiyoruz:  $a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$ ,  
 $a_3 - a_2 = 5 - 3 = 2$ ,  $a_4 - a_3 = 7 - 5 = 2$ , ...

$$a_n - a_{n-1} = (2n - 1) - (2n - 3) = 2n - 1 - 2n + 3 = 2$$

Fark sabittir ve  $d = 2$ ’ye eşittir.

Bu diziye aritmetik dizi denir.

**Örnek 1’den,** tanıma göre, aritmetik dizinin  $d > 0$  ise, **monoton arttığını**,  $d < 0$  ise dizi **monoton azaldığını** ve  $d = 0$  ise **sabit dizi** olduğunu görüyoruz.

Genel olarak,  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots$  aritmetik dizisi verilmiş olsun. Aritmetik dizi tanımından şu sonuç elde edilir:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_n - a_{n-1} = d$$

Aşağıdaki eşitliklerden şunu elde ediyoruz:

$$a_2 - a_1 = d, \text{ yani } a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 - a_2 = d, \text{ yani } a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 - a_3 = d, \text{ yani } a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$

...

$$a_n - a_{n-1} = d, \text{ yani } a_n = a_{n-1} + d.$$

Önceden elde edilen formüller  $a_n = a_{n-1} + d$ 'de yerine konulursa  $a_n = a_1 + (n-1)d$  elde edilir.

**Teorem:** Aritmetik bir dizinin genel terimi için  $a_n = a_1 + (n-1)d$  geçerlidir.

**Örnek 3.** 3, 5, 7, 9, 11, ... aritmetik dizisinin 30. terimini bulunuz.

**Çözüm:** Dizinin ilk terimi  $a_1 = 3$  ve ortak fark  $d = 5 - 3 = 2$ 'dir. Her bir sonraki terim 2 artar.

Teoreme göre, otuzuncu terimi  $a_{30} = a_1 + (30-1)d$ , yani  $a_{30} = 3 + 29 \cdot 2 = 61$  olarak hesaplayabiliriz.

**Örnek 4.** 5, 1, -3, ... aritmetik dizisinde hangi terim -55'e eşittir?

**Çözüm:** Aritmetik dizinin verilen terimlerinden ilk terimi, ortak farkı ve  $n$ 'inci terimi belirleyebiliriz:  $a_1 = 5$  ve  $d = 1 - 5 = -4$  ve  $a_n = -55$ . Verilen değerleri  $a_n = a_1 + (n-1)d$  formülüne yerine koyarsak:

$$-55 = 5 + (n-1) \cdot (-4) \Rightarrow -55 = 5 - 4n + 4, \text{ buradan } n = 16 \text{ elde edilir.}$$

Demek ki, aranan terim on altıncı terimdir.

**Örnek 5.**  $a_1 = -\frac{7}{2}$ ,  $d = -\frac{1}{2}$  ve  $a_n = -10$  ise  $n$ 'i hesaplayınız.

**Çözüm:** Verilen değerleri  $a_n = a_1 + (n-1)d$  formülüne yerine koyarsak:

$$-10 = -\frac{7}{2} + (n-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow -10 = -\frac{7}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \text{ buradan } n = 14 \text{ elde edilir.}$$

**Örnek 6.** Bir aritmetik dizinin beşinci terimi 19, onuncu terimi 39 ise diziye belirtiniz.

**Çözüm:** Sorunun şartlarından  $a_5 = 19$  ve  $a_{10} = 39$  olduğunu biliyoruz. Aritmetik dizinin, ilk terimi  $a_1$  ve ortak farkı  $d$  biliniyorsa tamamen belli olduğunu biliyoruz.

Şu sonuç elde edilir:

$$a_5 = a_1 + (5-1)d \Rightarrow 19 = a_1 + 4d$$

$$a_{10} = a_1 + (10-1)d \Rightarrow 39 = a_1 + 9d$$

Bu şekilde,  $\begin{cases} a_1 + 4d = 19 \\ a_1 + 9d = 39 \end{cases}$  doğrusal denklem sistemi elde edilir. Bunu çözmekle

$$\begin{cases} a_1 + 4d = 19 \\ a_1 + 9d = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 19 - 4d \\ 19 - 4d + 9d = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 19 - 4d \\ 5d = 20 / : 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 19 - 4 \cdot 4 \\ d = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$$

elde edilir. Buna göre  $a_1 = 3$  ve  $d = 4$  olduğunu buluyoruz. Aranan dizi: 3, 7, 11, 15, 19, ...

**Örnek 7.** Bir mağazada ayın ilk günü 147420 denar gelir elde edilirken, aynı ayın 31'inde gelir 95610 denar oldu. Azalan bir aritmetik dizi olarak temsil edilebiliyorsa, ortalama günlük gelir düşüşü ne kadardır?

**Çözüm:** Sorunun koşullarından  $a_1 = 147420$  ve  $a_{31} = 95610$  olduğunu biliyoruz. Aritmetik dizinin tanımından elde ederiz:

$$a_{31} = a_1 + (31-1)d \Rightarrow a_{31} = a_1 + 30d$$

İlk değerleri yerine koyarsak:

$$95610 = 147420 + 30d, \quad 30d = 95610 - 147420, \quad 30d = -51810 / : 30$$

$$d = \frac{-51810}{30}, \quad d = -1727$$

Gelirler her gün 1727 denar azalıyor.

**Örnek 8.** Üçüncü, beşinci ve yedinci terimlerinin toplamı 39 ve dördüncü ve dokuzuncu terimlerinin toplamı 35 ise aritmetik diziye bulunuz.

**Çözüm:** Sorunun koşullarından şu denklemleri yazabiliriz:

$$a_3 + a_5 + a_7 = 39 \text{ ve } a_4 + a_9 = 35.$$

$n$ 'inci terimin formülünü yerine koyarsak:

$$(a_1 + 2d) + (a_1 + 4d) + (a_1 + 6d) = 39 \Rightarrow 3a_1 + 12d = 39 \text{ yani } a_1 + 4d = 13.$$

$$(a_1 + 3d) + (a_1 + 8d) = 35 \Rightarrow 2a_1 + 11d = 35$$

Şu lineer denklem sistemini elde ediyoruz:

$$\begin{cases} a_1 + 4d = 13 \\ 2a_1 + 11d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 13 - 4d \\ 2a_1 + 11d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 13 - 4d \\ 2(13 - 4d) + 11d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 13 - 4d \\ 3d = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 13 - 4 \cdot 3 \\ d = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}$$

İstenen dizi 1, 4, 7, ...

**Örnek 9.** 9 ve 37 sayıları arasına, verilen sayılarla birlikte aritmetik bir dizi oluşturan 6 sayı ekleyin (yerleştirin).

**Çözüm:** Verilen koşullardan, 9 ve 37 sayıları arasına 6 sayı eklememiz ve 9,   ,   ,   ,   ,   , 37 aritmetik dizisini elde etmemiz gerekiyor. Dizinin 8 terimi vardır ve ilk ve sekizinci terimleri  $a_1 = 9$  ve  $a_8 = 37$ 'dir.

Genel terim formülünden (bu durumda sekizinci terim)  $a_8 = a_1 + 7d$ , yerine koyarak elde ederiz:

$$37 = 9 + 7d \Rightarrow d = 4.$$

İstenen dizi: 9, **13, 17, 21, 25, 29, 33**, 379 elde edilir.

**Örnek 10.** Bir mağazada haftanın ilk günü 10000 dinar, beşinci günü ise 22000 dinar ciro elde edildi. Cironun her gün düzenli olarak arttığı varsayılırsa, günlük ciro artışını hesaplayınız.

**Çözüm:** Soruda cironun düzenli olarak arttığı belirtiliyor, bu da cironun bir aritmetik dizi oluşturduğu anlamına geliyor. Sorunun koşullarında ilk ve beşinci günün cirosu verilmiştir, yani  $a_1 = 10000$  ve  $a_5 = 22000$ . Genel terim formülünden  $a_5 = a_1 + 4d$ , yerine koyarak  $22000 = 10000 + 4d \Rightarrow 4d = 12000$ , yani  $d = 3000$  elde ederiz.

### Alıştırma Soruları:

1. 2, 5, 8, ... aritmetik dizisinin 15. terimini bulunuz.
2. 5, 1, -3, ... aritmetik dizisinde, -51 sayısı hangi terimdir?
3. Sıradaki 120. tek sayıyı hesaplayınız.
4. Sıradaki 100. çift sayıyı hesaplayınız.
5. Bir kuruluşun 1 Ocak 2000'deki borcu 50000 avro idi ve her yıl borç 3500 avro azalmıştır. Borç kaç yıl sonra 22000 avro olur?

6. Aritmetik dizi oluşturan üç sayının toplamı 24'tür. İlk sayının karesinin, üçüncü ve ikinci sayıların karelerinin farkından 96 eksik olduğu biliniyorsa, bu sayıları bulunuz.

7. Mesleki orta öğretim okulu atölyesinde, avize üretimi her ay aynı dinamikte artmaktadır. İlk ay 200 avize, dördüncü ay ise 224 avize üretilmiştir. Hangi ay 272 avize üretilmiştir?

8. 12 ve 100 sayıları arasına, verilen sayılarla birlikte aritmetik dizi oluşturan 10 sayı ekleyiniz.

9. Dördüncü ve altıncı terimlerinin toplamı -20 ve ilk ve beşinci terimlerinin çarpımı -140 olan aritmetik diziyi bulunuz.

10. Verilenlere göre aritmetik diziyi belirtiniz:

a)  $a_1 + a_4 = -22$  ve  $a_5 = -6$ .

b)  $a_2 + a_{12} = 50$  ve  $a_3 + a_7 = 38$ .

11. Aritmetik dizide n'inci terimi bulunuz:

a)  $a_1 = 4, d = 3, n = 8$

c)  $a_1 = -9, d = 5, n = 12$

b)  $a_1 = \frac{1}{2}, d = -\frac{1}{4}, n = 9$

ç)  $a_1 = a + b, d = a, n = 15$

### 3. ARİTMETİK DİZİNİN İLK $n$ - TERİMİNİN TOPLAMI

Sonlu sayıda terimi olan 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 aritmetik dizisi verilsin.

2 ve 9, 3 ve 8, 4 ve 7, 5 ve 6 terimleri, 1 ve 10 uç terimlerinden eşit uzaklıktadır. Terimlerin toplamı için  $1+10=2+9=3+8=4+7=5+6=11$  geçerlidir.

**Özellik 1.** Sonlu bir aritmetik dizide, ilk ve son terimden eşit uzaklıktaki herhangi iki terimin toplamı, uç terimlerin toplamına eşittir, yani  $a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + a_n$ ,  $2 \leq k \leq n$

**İspat:**  $a_k = a_1 + (k-1)d$  ve  $a_{n-(k-1)} = a_1 + (n-(k-1)-1)d = a_1 + (n-k)d$

Toplamları için şunu elde ederiz:

$$a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + (k-1)d + a_1 + (n-k)d = a_1 + a_1 + (k-1+n-k)d = a_1 + \underbrace{a_1 + (n-1)d}_{a_n} = a_1 + a_n$$

elde etmemiz gereken de buydu.

Aynı aritmetik diziyi tekrar inceleyelim, ancak şimdi sonsuz sayıda terimle, yani 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...,  $n$ , ...

Bu dizinin terimleri için ne geçerlidir?

$$2 = \frac{1+3}{2}, \quad 3 = \frac{2+4}{2}, \quad 4 = \frac{3+5}{2}, \quad 5 = \frac{4+6}{2}, \quad \dots$$

İlk terim hariç, dizinin her teriminin komşu terimlerinin aritmetik ortalaması olduğunu görüyoruz.

**Özellik 2.** Bir aritmetik dizinin ilk terimi dışındaki her terimi, kendinden önceki ve sonraki terimlerin aritmetik ortalamasıdır, yani:

$$k > 1, k \in \mathbb{N} \text{ için, } a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}, \text{ dir.}$$

**İspat:**  $a_{k-1}, a_k, a_{k+1}$  bir aritmetik dizinin üç ardışık terimi olsun. Aritmetik dizinin tanımına göre  $a_k - a_{k-1} = a_{k+1} - a_k$  yani  $2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$  geçerlidir, buradan  $a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$ ,  $k > 1, k \in \mathbb{N}$  elde ederiz, kanıtlamamız gereken de buydu.

Bu özellik genelleştirilebilir ve aşağıdakiler geçerlidir:

**Özellik 3.** Bir aritmetik dizinin her terimi, dizide kendisinden eşit uzaklıkta bulunan herhangi iki terimin aritmetik ortalamasıdır.

Bu özelliği 2, 4, 6, 8,  $\boxed{10}$ , 12, 14, 16, 18, ... aritmetik dizisinde inceleyelim.

$$10 \text{ sayısı için şu geçerlidir: } 10 = \frac{8+12}{2}, \quad 10 = \frac{6+14}{2}, \quad 10 = \frac{4+16}{2}, \quad 10 = \frac{2+18}{2}, \quad \dots$$

D ortak farkı ile  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$  aritmetik dizisi verilmiş olsun. Aritmetik dizinin ilk  $n$  teriminin toplamı  $S_n$  ile gösterilir ve:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \text{ yani } S_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

**Örnek 1.** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ... aritmetik dizisinin ilk 10 teriminin toplamını bulunuz.

**Çözüm:**

$$S_{10} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 5 \cdot (1 + 10) = 55$$

Örnekte ilk 10 terimin toplamını bulmamız istendi, ancak ilk 100 veya 1000 terimin toplamını bulmamız gerekseydi ne olurdu?

Aritmetik dizinin ilk  $n$  teriminin toplamı için teoremi yazalım.

**Teorem:** Aritmetik dizinin ilk  $n$  teriminin toplamı şu formüllerle hesaplanır:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \text{ veya } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

**İspat:**  $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$  ve ters sırada yazılmış şekli

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 \text{ olsun.}$$

İki eşitliğin sol ve sağ taraflarını toplayarak ve sağ taraftaki terimleri gruplandırarak:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \text{ elde edilir.}$$

Özellik 1'den:

$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots = a_{n-2} + a_3 = a_{n-1} + a_2 = a_n + a_1$  olduğunu biliyoruz. Bunları yerlerine koymakla:

$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_n$ , yani  $2S_n = n(a_1 + a_n)$  elde edilir. 2 ile bölerek böldüğümüzde  $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$  formülünü elde ederiz, kanıtlamamız gereken de buydu.

Aritmetik dizinin  $n$ 'inci terim formülünü yerine koyarsak:

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d)$  yani  $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$  elde ederiz. Böylece ikinci eşitlik de kanıtlanmış olur.

**Örnek 2.** 2, 6, 10, 14, 18, ... aritmetik dizisinin ilk 50 teriminin toplamını bulunuz.

**Çözüm:** Verilen aritmetik diziden  $a_1 = 2$  ve  $d = 6 - 2 = 4$  olduğunu belirleyebiliriz. O zaman ilk 50 terimin toplamı  $S_{50} = \frac{50}{2} \cdot (2 \cdot 2 + (50 - 1) \cdot 4) = 5000$  elde edilir.

**Örnek 3.** İlk  $n$  doğal sayının toplamını bulunuz.

**Çözüm:** İlk  $n$  doğal sayının dizisi 1, 2, 3, ...,  $n$ 'dir, burada  $a_1 = 1$  ve  $a_n = n$ 'dir.  $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(1 + n)$  formülüne yerine koyarsak, toplam için  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  elde edilir.

**Örnek 4.** Bir aritmetik dizinin ilk 20 teriminin toplamı 230 ve dördüncü terimi 5 ise, diziyi bulun.

**Çözüm:** Verilen koşullardan  $S_{20} = 230$  ve  $a_4 = 5$  olduğunu belirleyebiliriz. Aritmetik dizi formüllerine yerine koyarak şu denklemleri elde ederiz:  $\frac{20}{2}(2a_1 + (20 - 1)d) = 230$  ve  $a_1 + 3d = 5$ .

Denklemleri sadeleştirerek şu doğrusal denklem sistemini elde ederiz: 
$$\begin{cases} 2a_1 + 19d = 23 \\ a_1 + 3d = 5 \end{cases}$$

Sistemin çözümü  $a_1 = 2$  ve  $d = 1$ 'dir.

İstenen aritmetik dizi 2, 3, 4, ..., 21'dir.

**Örnek 5.** Tek sayıda terimi olan bir aritmetik dizide, orta terim 15 ve tüm terimlerin toplamı 135'tir. Terim sayısını bulunuz.

**Çözüm:** Sorunun koşullarından  $S_n = 135$  ve tek sayıda terimi olan aritmetik dizinin orta teriminin  $\frac{a_1 + a_n}{2} = 15$  olduğunu biliyoruz.

Aritmetik dizinin ilk  $n$  teriminin toplamı formülüne yerine koyarak  $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = n \frac{a_1 + a_n}{2}$  elde edilir. Oradan da  $135 = n \cdot 15$  denklemini elde ederiz, yani  $n = 9$  elde edilir.



**Alıştırma Soruları:**

1. 5, 9, 13, ... dizisinin 25. terimi ve ilk 25 teriminin toplamı kaçtır?
2.  $5a_1 + 10a_5 = 0$  ve  $S_4 = 14$  olan aritmetik diziye bulunuz.
3.  $a_1 = 7$ ,  $d = 5$  ve  $S_n = 243$  olan sonlu aritmetik dizide kaç terim vardır?
4.  $3 + 7 + 11 + \dots + x = 210$  denklemini çözünüz.
5. İlk terimi 7 ve 100. terimi 53 olan aritmetik dizinin ilk 100 teriminin toplamını hesaplayınız.
6. 40.000 denar tutarındaki bir para, her bir sonraki kişinin bir öncekinden 500 denar fazla alacağı şekilde 10 kişiye dağıtılmıştır. İlk ve son kişi kaç denar almıştır?
7. "AA" kablo üretim şirketi 2015 yılında 70.000 metre kablo üretmiştir. Şirket her yıl kablo üretimini 500 metre artırıyor, 2025 yılında kaç metre kablo üretileceğini ve tüm dönemde toplam kaç metre kablo üretildiğini belirtiniz.
8. İlk terimi 10 ve ilk on dört teriminin toplamı 1050 olan aritmetik dizinin genel terimini bulunuz.
9. Bir aritmetik dizinin dördüncü terimi 9 ve dokuzuncu terimi -6'dır. Toplamın 54 olması için dizinin kaç terimi toplanmalıdır?
10. 30, 27, 24, ... aritmetik dizisinin kaç teriminin toplamı 0'a eşit olur?
11. Bir aritmetik dizinin ilk dokuz teriminin toplamı 144 ve sonraki yedi terimin toplamı 368'dir. Diziye bulunuz!

#### 4. GEOMETRİK DİZİLER

Örnek 1. Şu diziler verilmiş olsun:

a)  $1, 2, 4, 8, 16, \dots$

c)  $5, -10, 20, -40, 80, \dots$

d)  $5, 5, 5, \dots$

b)  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

ç)  $99, 33, 11, \frac{11}{3}, \frac{11}{9}, \dots$

İkinci terimden başlayarak her terimin önceki terimine oranını belirtiniz.

#### Çözüm:

İkinci terimden başlayarak her terimin önceki terimine oranının sabit olduğu ve şu değerlere sahip olduğu görülebilir:

a) 2,

b)  $\frac{1}{2}$ ,

c) -2,

ç)  $\frac{1}{3}$ ,

d) 1.

**Tanım:** İkinci terimden başlayarak iki ardışık terim arasındaki oranının sabit bir sayı ( $q$ ) olduğu  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$  dizisine geometrik dizi denir.

Her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $a_{n+1} : a_n = q$ .

Örnek 2.  $1, 2, 4, 8, 16, \dots$  dizisi verilmiştir. Dizinin genel terimini ve ikinci terimden başlayarak her terimin önceki terimine oranını belirtiniz. Diziye ne ad verilir?

**Çözüm:** Dizinin genel terimi  $a_n = 2^{n-1}$  dir.

Oranı hesaplıyoruz:  $\frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2$ ,  $\frac{a_3}{a_2} = \frac{4}{2} = 2$ ,  $\frac{a_4}{a_3} = \frac{8}{4} = 2$ , ...,  $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2^{n-1}}{2^{n-2}} = 2$

Demek ki oran sabittir ve  $q = 2$ 'dir.

Bu diziye **geometrik dizi** denir.

Örnek 1'den, tanıma göre,  $a_1 > 0$  için geometrik dizinin  $q > 1$  ise monoton olarak arttığını,  $0 < q < 1$  ise monoton olarak azaldığını,  $q = 1$  ise sabit bir dizi olduğunu ve  $q < 0$  ise ne arttığını ne de azaldığını görebiliriz..

$a_1 < 0$  için geometrik dizi,  $0 < q < 1$  ise monoton olarak artar,  $q > 1$  ise monoton olarak azalır,  $q = 1$  ise sabit bir dizedir ve  $q < 0$  ise ne artar ne de azalır.

Genel olarak,  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots$  geometrik dizisi verilmiş olsun. Geometrik dizinin tanımına göre şu sonuç elde edilir:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

Buna göre:

$$\frac{a_2}{a_1} = q, \text{ yani, } a_2 = a_1 q,$$

$$\frac{a_3}{a_2} = q, \text{ yani, } a_3 = a_2 q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2,$$

$$\frac{a_4}{a_3} = q, \text{ yani, } a_4 = a_3 q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3 \dots$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q, \text{ yani, } a_n = a_{n-1} q, \text{ n'inci terim eşitliğinden } a_n = a_1 q^{n-1} \text{ elde edilir}$$

**Teorem:** Geometrik ilerlemenin genel terimi için  $a_n = a_1 q^{n-1}$  geçerlidir.

**Örnek 3.** Bir geometrik dizinin ilk terimi 3 ve yedinci terimi 192'dir. Geometrik dizinin ilk 7 terimini bulunuz.

**Çözüm:** Sorunun koşullarından  $a_1 = 3$  ve  $a_7 = 192$  olduğunu biliyoruz.

Geometrik dizisi teoreminden şu sonuç elde edilir:

$$a_7 = a_1 \cdot q^6, \quad 192 = 3 \cdot q^6, \quad q^6 = 64, \quad q = \pm 2$$

Eğer  $q = 2$  ise, geometrik dizi 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, ...'dir.

Eğer  $q = -2$  ise, geometrik dizi 3, -6, 12, -24, 48, -96, 192, ...'dir.

**Örnek 4.** Bir geometrik dizisinin ilk terimi 3, ortak çarpanı 4 tür. 3072 sayısı terimlerinden biridir. Bu terimin dizideki sıra numarası kaçtır?

**Çözüm:** Sorunun koşullarından  $a_1 = 3$ ,  $q = 4$  ve  $a_n = 3072$  olduğunu biliyoruz.

$$a_n = a_1 q^{n-1} \text{ tanımından, yerine koyarak } 3072 = 3 \cdot 4^{n-1} \Rightarrow 1024 = 4^{n-1} \Rightarrow 4^5 = 4^{n-1} \text{ elde ederiz.}$$

Buradan  $n - 1 = 5$ , yani  $n = 6$  olduğu sonucu elde edilir.

O halde verilen sayı altıncı terimdir.

**Örnek 5.**  $a_3 = -\frac{1}{4}$  ve  $a_6 = \frac{1}{32}$  ise geometrik dizinin ilk terimini ve ortak çarpanını hesaplayınız.

**Çözüm:**  $a_3 = a_1 q^2$  ve  $a_3 = -\frac{1}{4}$  olduğuna göre  $a_1 q^2 = -\frac{1}{4}$  gerekir.

$a_6 = a_1 q^5$  ve  $a_6 = \frac{1}{32}$ 'den  $a_1 q^5 = \frac{1}{32}$  elde ederiz.

Bu şekilde iki değişkenli iki denklemden oluşan bir sistem elde ederiz: 
$$\begin{cases} a_1 q^2 = -\frac{1}{4} \\ a_1 q^5 = \frac{1}{32} \end{cases}$$

Bu iki eşitliği taraf tarafa bölersek,  $\frac{a_1 q^2}{a_1 q^5} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{32}} \Rightarrow \frac{1}{q^3} = -8$  elde ederiz, buradan  $q^3 = -\frac{1}{8}$  yani

$q = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$  sonucu elde edilir.

İlk denklemde ortak çarpanın değerini yerine koyarsak:

$$a_1 \left( -\frac{1}{2} \right)^2 = -\frac{1}{4} \Rightarrow a_1 = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = -1 \text{ elde ederiz.}$$

Dizinin ilk teriminin  $a_1 = -1$  ve ortak çarpanının  $q = -\frac{1}{2}$  olduğunu elde ettik.

**Örnek 6.**  $a_5 + a_7 = 240$  ve  $a_4 + a_6 = 120$  ise geometrikdizisinin ilk altı terimini yazınız.

**Çözüm:** Sorunun koşullarından şu doğrusal denklem sistemini elde ederiz: 
$$\begin{cases} a_5 + a_7 = 240 \\ a_4 + a_6 = 120 \end{cases}$$
 Bura-

da  $n$ 'inci terim  $a_n = a q^{n-1}$  formülünü değiştirmekle şu iki değişkenli denklem sistemini elde ederiz:

$$\begin{cases} a_1 q^4 + a_1 q^6 = 240 \\ a_1 q^3 + a_1 q^5 = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 q^4 (1 + q^2) = 240 \\ a_1 q^3 (1 + q^2) = 120 \end{cases}$$

Denklemleri taraf tarafa bölmekle,  $\frac{a_1 q^4 (1 + q^2)}{a_1 q^3 (1 + q^2)} = \frac{240}{120}$ , oradan da  $q = 2$  elde edilir.

İlk denklemde ortak çarpanın değerini yerine koyarak ilk terimin değerini elde ederiz:

$$a_1 \cdot 2^4 (1 + 2^2) = 240 \Rightarrow a_1 = \frac{240}{80} = 3$$

**Geometrik Dizi Örnekleri** 3,6,12, 24, 48,96,...

**Örnek 7:** Bir kentin nüfusu her yıl %1 azaldığı ve şu anda 60.000 olduğu biliniyor. 10 yıl sonraki nüfusu hesaplayınız.

**Çözüm:** Nüfus azalması geometrik dizi prensibine göre gerçekleşir. Geometrik dizinin ilk terimi  $a_1 = 60000$ 'dir. Azalma oranı  $p = 1\%$  olduğundan, geometrik dizinin ortak çarpanı  $q = 1 - \frac{p}{100}$  formülüyle bulunur. Bu durumda,  $q = 1 - \frac{1}{100} = 1 - 0,01 = 0,99$  elde edilir. 10 yıl sonraki nüfus istendiği için,  $n = 11$ 'dir (şu anki nüfus  $a_1$ , 1 yıl sonra  $a_2$ , ..., 10 yıl sonra  $a_{11}$ ).

$$a_{11} = a_1 q^{10} \text{ formülünden, } a_{11} = 60000 \cdot 0,99^{10} \Rightarrow a_{11} = 54263.$$

Sonuç olarak, şehir 10 yıl sonra 54.263 nüfusa sahip olacaktır.

**Örnek 8:** 10 ve 160 sayıları arasına, verilen sayılarla birlikte geometrik bir dizi oluşturacak şekilde üç sayı yerleştiriniz.

**Çözüm:** 10 ve 160 arasına 3 sayı ekleyerek 10,  $\_, \_, \_,$  160 şeklinde bir geometrik dizi oluşturulmalıdır. Bu durumda  $a_1 = 10$  ve  $a_5 = 160$ 'dır.

$$a_5 = a_1 q^4 \text{ formülünden, } 160 = 10 \cdot q^4 \Rightarrow q^4 = 16 \text{ ve dolayısıyla } q = \pm 2 \text{ bulunur.}$$

İki olası geometrik dizi vardır:

$$q = 2 \text{ ise, dizi } 10, 20, 40, 80, 160 \text{ 'tır.}$$

$$q = -2 \text{ ise, dizi } 10, -20, 40, -80, 160 \text{ 'tır.}$$

**Örnek 9:** "AA" şirketinin Ocak ve Mart aylarındaki toplam metal ihracatı 1.300.000 \$ kâr getirirken, Şubat ve Nisan aylarındaki toplam ihracat 2.600.000 \$ kâr getirmiştir. Kârın geometrik bir dizi şeklinde arttığı varsayılırsa, ilk dört aydaki üretkenliği belirtiniz.

**Çözüm:**  $n'$  ci aydaki kârı  $a_n$  olsun  $n = 1, 2, 3, 4$ .

Ödevin koşuluna göre

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 1300000 \\ a_2 + a_4 = 2600000 \text{ gerekir.} \end{cases}$$

Teoremden:  $a_2 = a_1 \cdot q$ ,  $a_3 = a_1 \cdot q^2$  ve  $a_4 = a_1 \cdot q^3$  elde edilir.

Denklem sistemini çözerek devam ediyoruz.

$$\begin{cases} a_1(1+q^2) = 1300\,000 \\ a_1q(1+q^2) = 2\,600\,000 \end{cases}$$

Birinci denklemi ikincisinde değiştirmekle  $1300\,000q = 2\,600\,000$  elde edilir.

Denklem sistemini çözdüğümüzde  $q = 2$  ve  $a_1 = 260\,000$  elde ederiz.

Bu durumda:

Ocak ayı kârı  $a_1 = 260\,000$  \$

Şubat ayı kârı  $a_2 = 260\,000 \cdot 2 = 520\,000$  \$

Mart ayı kârı  $a_3 = 260\,000 \cdot 2^2 = 1\,040\,000$  \$

Nisan ayı kârı  $a_4 = 260\,000 \cdot 2^3 = 2\,080\,000$  \$ elde edilir.

### Alıştırma Soruları

1. 8, 4, 2, ... geometrik dizisinin 10. terimini bulunuz.
2. 1, 3, 9, 27, ... geometrik dizisinin 20. terimini bulunuz.
3. Ortak çarpanı (böleni) 4 ve 8'ci terimi 256 olan geometrik dizinin ilk terimini bulunuz.
4. Bir geometrik dizinin 4'cü terimi 162, 6'cı terimi 1458 ise, ilk terimini ve ortak çarpanını bulunuz.
5.  $160a_7 + a_5 = 80$  ve  $a_6 + a_4 = -80$  ise geometrik diziyi bulunuz.
6. 3, b, 75 sayıları geometrik dizi oluşturacak şekilde b sayısını bulunuz.
7. Bir geometrik dizinin 6'cı ve 4'cü terimleri arasındaki fark 72, 3'cü ve 1'ci terimleri arasındaki fark 9 ise, geometrik diziyi bulunuz.
8. Bir geometrik dizinin ilk üç teriminin toplamı 6, ikinci, üçüncü ve dördüncü terimlerinin toplamı -3 ise, geometrik diziyi bulunuz.
9. Bir geometrik dizinin ilk iki teriminin toplamı 15, sıradaki iki teriminin toplamı 60 ise, ilk terimini ve ortak çarpanını bulunuz.
10. Bir geometrik dizinin üçüncü ve birinci terimleri arasındaki fark 24, beşinci ve birinci terimleri arasındaki fark 624 ise, ilk terimini ve ortak çarpanı bulunuz.
11.  $a_3 - a_2 + a_1 = 13$  ve  $a_5 + a_2 = 78$  ise, geometrik dizinin ilk beş terimini yazınız.

### 5. Geometrik Dizinin İlk $n$ Teriminin Toplamı

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 gibi sonlu sayıda terime sahip bir geometrik dizi verilmiş olsun.

2 ve 64, 4 ve 32, 8 ve 16 terimleri, 1 ve 128 uç terimlerinden eşit uzaklıktadır. Bu terimlerin çarpımları sabittir:  $1 \cdot 128 = 2 \cdot 64 = 4 \cdot 32 = 8 \cdot 16 = 128$ .

**Özellik 1:** Sonlu bir geometrik dizide, ilk ve son terimlerden eşit uzaklıktaki herhangi iki terimin çarpımı, uç terimlerin çarpımına eşittir. Yani,

$$a_k \cdot a_{n-(k-1)} = a_1 \cdot a_n, \quad 2 \leq k \leq n$$

$$\text{İspat: } a_k = a_1 q^{k-1} \text{ ve } a_{n-(k-1)} = a_1 q^{(n-(k-1)-1)} = a_1 q^{(n-k)}$$

Bunların çarpımından,  $a_k \cdot a_{n-(k-1)} = a_1 q^{(k-1)} \cdot a_1 q^{(n-k)} = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{(k-1+n-k)} = a_1 \cdot \underbrace{a_1 q^{(n-1)}}_{a_n} = a_1 \cdot a_n$  elde edilir.

Aynı geometrik diziyi bir daha inceleyelim, fakat şimdi sonsuz sayıda terimleri olsun:  
11, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...,  $2^{n-1}$ , ...

Bu dizinin terimleriyle ilgili nasıl bir bağıntı vardır?

$$2^2 = 1 \cdot 4, \quad 4^2 = 2 \cdot 8, \quad 8^2 = 4 \cdot 16, \quad 16^2 = 8 \cdot 32, \dots$$

Görüldüğü gibi, dizide ilk terim dışında her terimin karesi, komşu terimlerinin çarpımına eşittir.

**Özellik 2:** Bir geometrik dizinin herhangi bir terimi (ilk terim hariç), kendisinden önceki ve sonraki terimlerin geometrik ortalamasıdır.

$$k > 1, k \in N \text{ için, } a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1} \text{ yani } a_k = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}} \text{ dir.}$$

**İspat:**  $a_{k-1}, a_k, a_{k+1}$  bir geometrik dizisinin ardışık üç terimi olsun. Tanım gereğince  $\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_{k+1}}{a_k}$  geçerlidir. Oradan  $a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1}$ , yani  $k > 1, k \in N$  için,  $a_k = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}$  elde edilir. Zaten bunun ispatlanması gerekirdi.

$$a_1 \neq -1, 1 \text{ ve } q \neq -1$$

Bu özelliği genelleştirebiliriz:

**Özellik 3:** Bir geometrik dizinin herhangi bir terimi, dizide kendisinden eşit uzaklıktaki herhangi iki terimin geometrik ortalamasıdır.

**Örnek:** Bu özelliği  $1, 2, 4, 8, \boxed{16}, 32, 64, 128, 256, \dots$  geometrik dizisinde inceleyelim.

16 sayısı için:  $16^2 = 8 \cdot 32$ ,  $16^2 = 4 \cdot 64$ ,  $16^2 = 2 \cdot 128$ ,  $16^2 = 1 \cdot 256$ , ...

$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$  ortak çarpanı  $q$  olan bir geometrik dizi olsun. Bu dizinin ilk  $n$  teriminin toplamı  $S_n$  ile gösterilir:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \text{ yani } S_n = \sum_{i=1}^n a_i \text{ dir.}$$

$$a_1 \neq -1, 1 \text{ ve } q \neq -1$$

**Örnek 1:** 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, ... geometrik dizisinin ilk 10 teriminin toplamını bulunuz.

**Çözüm:**

$$S_{10} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 = 1023$$

Geometrik dizinin tüm terimlerini yazmak ve ardından toplamalarını hesaplamak yerine, geometrik dizinin ilk  $n$  teriminin toplamı için bir formül kullanacağız.

**Teorem:** Geometrik dizinin ilk  $n$  teriminin toplamı  $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$  şu formülle belirtilir:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1$$

**İspat:**

İlk  $n$ - terimin toplamı,  $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$

ve bunu geometrik dizisinin  $n$ -ci terimine değiştirirsek,

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} \text{ elde edilir.}$$

Eşitliğin her iki tarafını  $q$  ile çarparsak:

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \text{ elde edilir.}$$

Şimdi, ikinci eşitliktentaraf tarafa ilk eşitliği çıkarırsak:

$$qS_n - S_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n - a_1 - a_1q - a_1q^2 - \dots - a_1q^{n-2} - a_1q^{n-1}, \text{ yani}$$

$$qS_n - S_n = a_1q^n - a_1, \text{ elde edilir.}$$



$$S_n(q-1) = a_1(q^n - 1) \text{ elde edilir.}$$

Buradan  $S_n$  ifade edilirse, geometrik dizisinin ilk n-terim toplamı olan  $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ ,  $q \neq 1$  formülü elde ediyoruz. Zaten bunun ispatlanması gerekirdi.

**Örnek 2:** 3, 6, 12, ... geometrik dizisinin ilk 20 teriminin toplamını bulunuz.

**Çözüm:** Verilen diziden  $a_1 = 3$  ve  $q = 2$  olduğunu belirleyebiliriz. Bunları  $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$  formülüne değiştirmekle

$$S_{20} = 3 \cdot \frac{2^{20} - 1}{2 - 1} = 3(1048576 - 1) = 3\,145\,725 \text{ elde edilir.}$$

**Örnek 3:** Ortak çarpanı  $q = -\frac{1}{2}$  olan ve ilk on teriminin toplamı  $\frac{1023}{512}$  olan bir geometrik dizinin ilk terimini bulunuz.

**Çözüm:**  $S_{10} = a_1 \frac{q^{10} - 1}{q - 1}$  formülünden:

$$\frac{1023}{512} = a_1 \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} \Rightarrow \frac{1023}{512} = a_1 \frac{1 - 1024}{-3} \Rightarrow \frac{1023}{512} = a_1 \frac{341}{512}, \text{ yani } a_1 = 3 \text{ elde edilir.}$$

**Örnek 4:** Ortak çarpanı 3 olan bir geometrik dizinin ilk altı teriminin toplamı 728'dir. Geometrik dizinin dokuzuncu terimini hesaplayınız.

**Çözüm:**

$$S_6 = a_1 \frac{q^6 - 1}{q - 1} \text{ olduğuna göre, } 728 = a_1 \frac{3^6 - 1}{3 - 1} \Rightarrow 728 = a_1 \cdot 364, \text{ yani } a_1 = 2 \text{ elde edilir.}$$

Geometrik dizinin dokuzuncu terimini  $a_9 = a_1 q^8$  formülüyle bulabiliriz. Buna göre,  
 $a_9 = 2 \cdot 3^8 = 13\,122$  elde edilir.

**Örnek 5:** İlk terimi 5 ve ortak çarpanı -4 olan geometrik diziden kaç terim toplanmalıdır ki toplam 262145 olsun?

**Çözüm:** Ödevin koşulundan  $S_n = 262145$ ,  $a_1 = 5$  ve  $q = -4$  değerlerini  $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$  formülünde yerleştirmekle  $262145 = 5 \cdot \frac{(-4)^n - 1}{-4 - 1}$  elde edilir. Buna göre

$$262145 = \frac{(-4)^n - 1}{-1} \Rightarrow -262144 = (-4)^n \Rightarrow (-4)^n = (-4)^9 \text{ ve } n = 9 \text{ elde edilir.}$$

**Örnek 6:** Bir geometrik dizinin ilk dört teriminin toplamı 40 ve sonraki dört teriminin toplamı 2187'dir. Dizinin terimlerini bulunuz.

**Çözüm:** Verilen bilgilere göre,  $S_4 = 40$  ve  $S_8 - S_4 = 3240$ 'tır. Geometrik dizinin n- terimi formülünü kullanarak şu denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{cases} a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = 40 \\ (a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + a_1q^5 + a_1q^6 + a_1q^7) - (a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3) = 3240 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = 40 \\ a_1q^4 + a_1q^5 + a_1q^6 + a_1q^7 = 3240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(1 + q + q^2 + q^3) = 40 \\ a_1q^4(1 + q + q^2 + q^3) = 3240 \end{cases}$$

İkinci denklemi birinci denkleme bölersek:

$$\frac{a_1q^4(1 + q + q^2 + q^3)}{a_1(1 + q + q^2 + q^3)} = \frac{3240}{40} \Rightarrow q^4 = 81, \text{ yani } q = \pm 3 \text{ elde edilir.}$$

$q = 3$  için,  $a_1(1 + q + q^2 + q^3) = 40$  eşitliğinden, birinci denklemden  $a_1(1 + 3 + 3^2 + 3^3) = 40$ , yani  $a_1 = 1$  bulunur. Geometrik dizi: 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187'dir.

$q = -3$  için,  $a_1(1 + q + q^2 + q^3) = 40$  eşitliğinden

$a_1(1 + (-3) + (-3)^2 + (-3)^3) = 40$  denklemi elde edilir ve oradan  $a_1 = -2$  bulunur. Geometrik dizi: -2, 6, -18, 54, -162, 486, -1458, 4374 elde edilir.

**Örnek 7:** Bir projede çalışan 5 kişiye 74416 denar dağıtılmalıdır. Her bir sonraki kişi bir önceki kişiden %20 daha fazla alacak şekilde dağıtım yapılmalıdır. Her biri kaç denar alacaktır?

**Çözüm:** Verilen bilgilere göre, toplam miktar  $S_5 = 74416$ ,  $n = 5$ 'tir. Artış geometrik dizi prensibine göre gerçekleşir. Ortak çarpan  $q = 1 + \frac{p}{100}$  formülüyle hesaplarız, burada  $p = 20\%$ 'dir. Bu durumda  $q = 1 + \frac{20}{100} = 1,2$  dir.

Bu değerleri toplam formülünde değiştirmekle  $S_5 = a_1 \frac{q^5 - 1}{q - 1} \Rightarrow 74416 = a_1 \frac{1,2^5 - 1}{1,2 - 1}$  elde edilir. O halde  $74416 = a_1 \cdot 7,4416$  eşitliğinden  $a_1 = 10000$  elde edilir.

İlk kişinin 10000 dinar alacağını bulduk. Geometrik dizinin  $n$ - terimini belirleme tanımını kullanarak, her kişinin alacağı miktarı bulabiliriz: İlk kişi  $a_1 = 10000$ , ikinci kişi  $a_2 = a_1 q = 10000 \cdot 1,2 = 12000$ , üçüncü kişi  $a_3 = a_2 q = 12000 \cdot 1,2 = 14400$ , dördüncü kişi  $a_4 = a_3 q = 14400 \cdot 1,2 = 17280$ , beşinci kişi  $a_5 = a_4 \cdot q = 17280 \cdot 1,2 = 20736$  denar.

### Alıştırma Soruları:

1. Bir geometrik dizinin son terimi 112, terimlerin toplamı 217 ve ortak çarpanı 2 ise, ilk terimi hesaplayınız.

2. -1, 3, -9, ... geometrik dizisinin ilk 10 teriminin toplamını hesaplayınız.

3. 6, 12, 24, ... geometrik dizisinin ilk 8 teriminin toplamını hesaplayınız.

4. İlk terimi  $a_1 = -2$  ve ortak çarpanı  $q = 2$  olan geometrik dizinin ilk 15 teriminin toplamını bulunuz.

5. Bir araba 10.000 euro'ya satın alınmıştır. Arabanın değeri, yılın başından itibaren yıllık %10 azalmaktadır.

6.  $a_1 = 2$ ,  $a_n = 64$ ,  $S_n = 126$  olan bir geometrik dizide  $q$  ve  $n$ 'yi bulunuz. 4 yıl sonra arabanın değeri ne kadar olacaktır?

7.  $a_1 = 2$ ,  $q = -3$ ,  $S_n = -364$  olan bir geometrik dizide  $a_n$  ve  $n$ 'yi hesaplayınız. 10 yıl sonra arabanın değeri ne kadar olacaktır?

8. a)  $a_5 = \frac{2}{27}$ ,  $q = -\frac{2}{3}$  olan geometrik dizide  $a_1$  ve  $S_5$ 'i hesaplayınız.

b)  $a_1 = \frac{1}{64}$ ,  $q = -\frac{4}{3}$ ,  $a_n = -\frac{16}{243}$  olan geometrik dizide  $S_n$  ve  $n$ 'yi hesaplayınız.

9.  $a_6 - a_4 = 216$ ,  $a_3 - a_1 = 8$ ,  $S_n = 40$  olan bir geometrik dizide  $a_1$ ,  $q$  ve  $n$ 'yi hesaplayınız.

10. Üç sayı geometrik dizi oluşturmaktadır. Onların toplamı, aynı terimlerin çarpımsal terslerinin toplamına eşittir ve terslerinin toplamına eşittir ve  $\frac{7}{2}$  dir. Bu sayılar hangileridir?

11. Bir üç basamaklı sayının rakamları geometrik dizi oluşturmaktadır. İlk ve üçüncü rakamın toplamı, onlar basamağındaki rakamdan 7 fazladır. Sayının rakamları ters sırada yazılırsa, elde edilen yeni üç basamaklı sayı verilenden 792 kadar daha büyük olacaktır. Bu hangi sayıdır?

## 6. DİZİLERİN LİMİT DEĞERLERİ

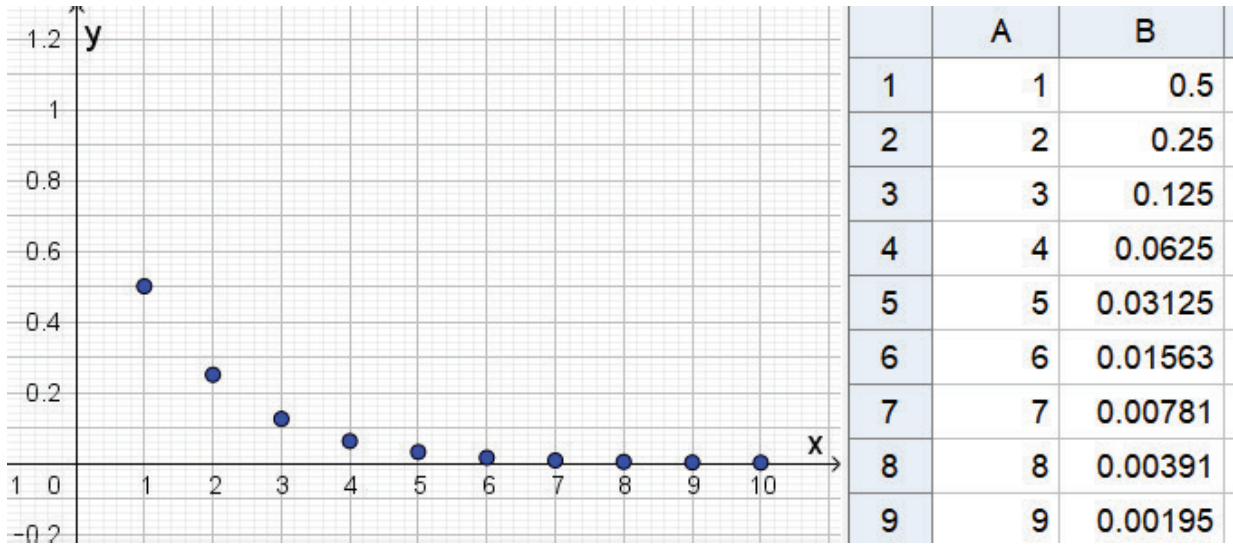
Genel terimi  $(a_n)$  olan bir dizide  $n$  sürekli arttıkça ne oluyor?

**Örnek 1:** Verilen dizilerin ilk beş terimini bulunuz ve ondan sonra koordinat sisteminde ve sayı doğrusunda gösteriniz:

a)  $a_n = \frac{1}{2^n}$     b)  $a_n = (-1)^n$     c)  $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$     ç)  $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$     d)  $a_n = 2^n$

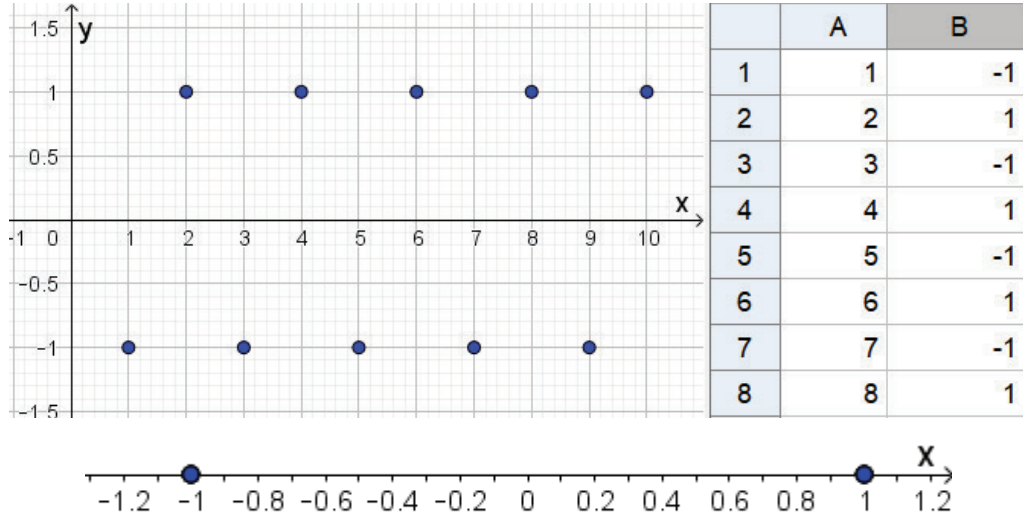
**Çözüm:**

a)  $a_n = \frac{1}{2^n}$  dizisinin ilk beş terimi:  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$  dir. Koordinat sisteminde ve sayı doğrusunda gösterimi aşağıda gösterilmiştir:



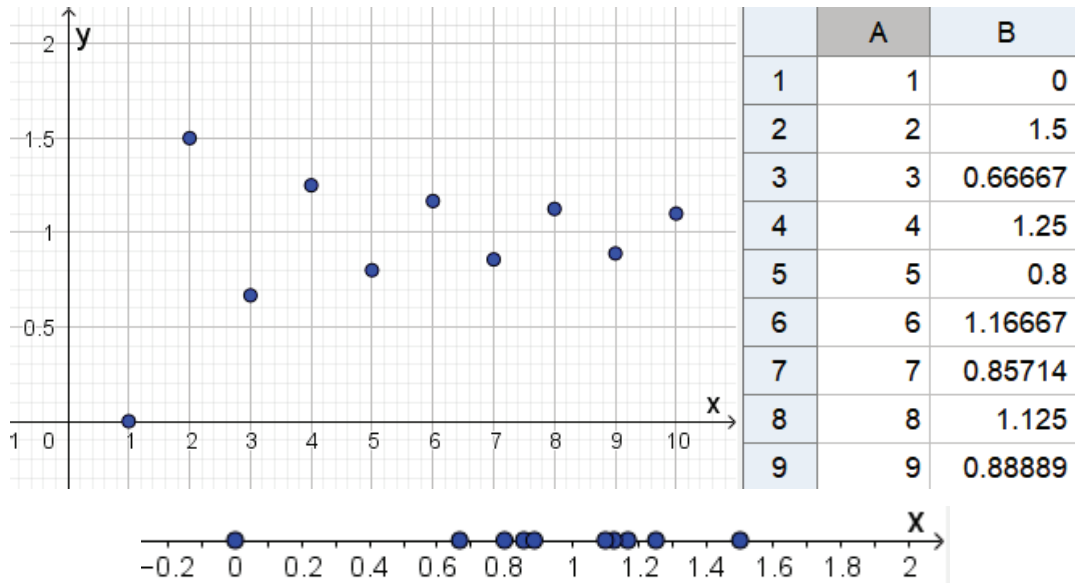
Şunu fark edebiliriz:  $n$ 'nin değeri arttıkça, dizinin terimleri küçülür ve sayı doğrusunda 0'a yaklaşır, yani noktalar 0 etrafında yoğunlaşıyorlar (Koordinat sisteminde noktalar  $x$ - eksenine yaklaşır.)

b)  $a_n = (-1)^n$  dizisinin ilk beş terimi:  $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$  dir. Koordinat sisteminde ve sayı doğrusunda gösterimi aşağıda gösterilmiştir:



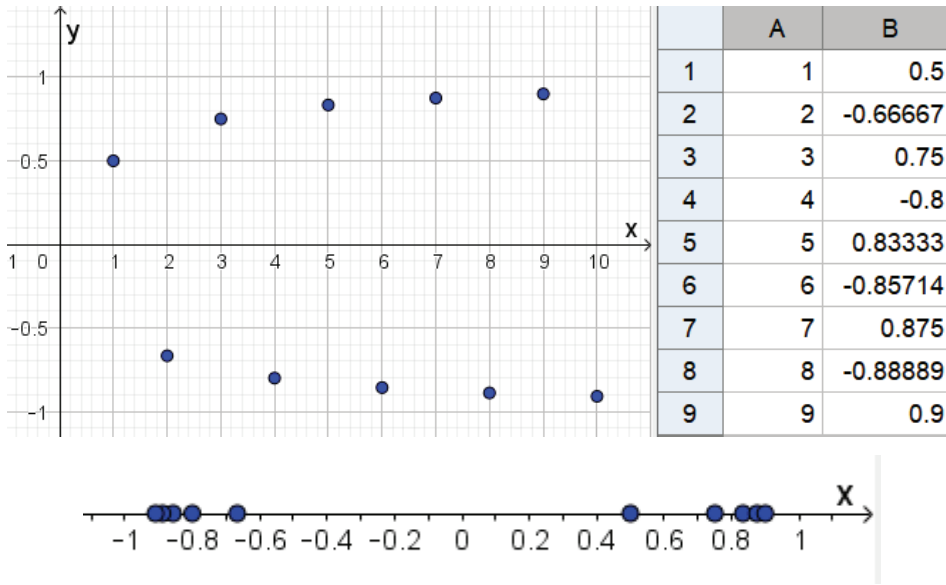
Gördüğümüz gibi,  $n$ 'nin değeri arttıkça, dizinin terimleri -1 veya 1 değerlerinde kalmaktadır. Tek indisli terimler -1'e, çift indisli terimler ise 1'e eşittir. Terimler sayı doğrusunda -1 veya 1'de toplanır. (Koordinat sisteminde noktaların ikinci koordinatı -1 veya 1'dir.)

c)  $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$  genel terimli dizinin ilk beş terimi:  $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \dots$  'dir. Koordinat sisteminde ve sayı doğrusunda gösterimi aşağıda verilmiştir:



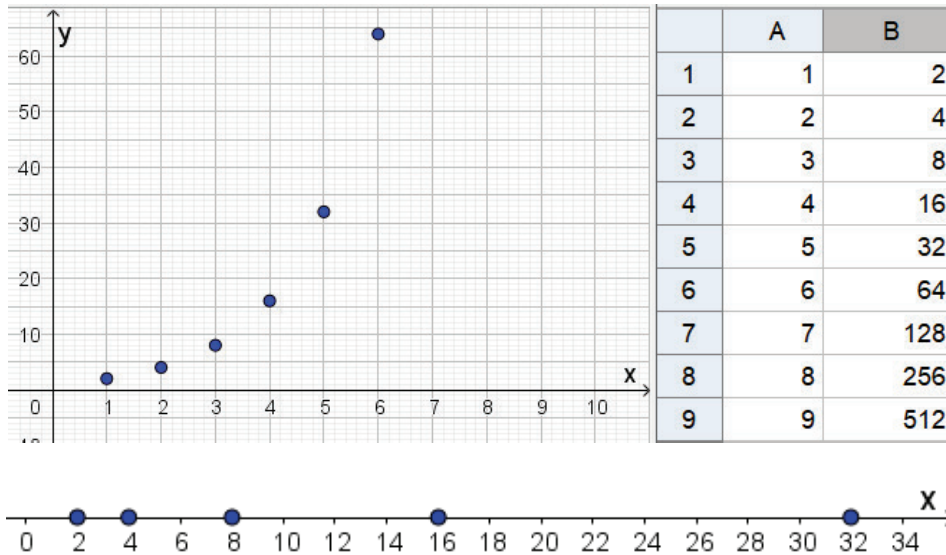
Görüldüğü gibi,  $n$ 'nin değeri arttıkça, dizinin terimleri 1 noktasına göre sırayla sol ve sağ tarafta yer almaktadır. Terimler 1'e yaklaşmaktadır. (Koordinat sisteminde noktalar  $y = 1$  doğrusuna yaklaşmaktadır.)

ç) Genel terimi  $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$  olan dizinin ilk beş terimi:  $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$ 'dir. Koordinat sisteminde ve sayı doğrusunda gösterimi aşağıdaki şekildedir:



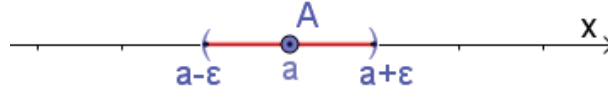
Görüldüğü gibi,  $n$ 'nin değeri arttıkça, dizinin terimleri 1 veya -1'e yaklaşmaktadır. Tek indisli terimler 1'e, çift indisli terimler ise -1'e yaklaşmaktadır. Terimler sayı doğrusunda 1 veya -1'de yoğunlaşır. (Koordinat sisteminde noktalar  $y = 1$  veya  $y = -1$  doğrularına yaklaşmaktadır.)

d) Genel terimi  $a_n = 2^n$  olan dizinin ilk beş terimi: 2, 4, 8, 16, 32, ...'dir. Koordinat sisteminde ve sayı doğrusunda gösterimi aşağıdaki şekildedir:



Görüldüğü gibi,  $n$ 'nin değeri arttıkça, dizinin terimleri artar ve belirli bir toplanma noktası yoktur. (Koordinat sisteminde noktalar  $x$  ekseninden uzaklaşır.)

**Tanım:** Herhangi bir pozitif  $\varepsilon$  reel sayısı için  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  açık aralığı, sayı doğrusunda  $A$  noktasının  $\varepsilon$ -komşuluğu olarak adlandırılır, yani  $A$  noktasına karşılık gelen  $a$  reel sayısının  $\varepsilon$ -komşuluğudur.



**Tanım:** Her  $\varepsilon > 0$  reel sayısı için, dizinin sonsuz sayıda teriminin  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  aralığına ait olduğu durumda,  $a$  reel sayısına  $(a_n)$  dizisinin **yığılma noktasıdır** denir.

Örnek 1'de:

- a) dizisinin bir yığılma noktası vardır ve o sayı 0'dır çünkü dizinin sonsuz sayıda terimi  $(0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon)$  aralığına aittir.
- b) dizisinin 1 ve -1 olmak üzere iki yığılma noktası vardır, çünkü dizinin sonsuz sayıda terimi  $(-1 - \varepsilon, -1 + \varepsilon)$  ve  $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$  aralıklarına aittir.
- c) dizisinin 1 sayısı olmak üzere bir tane yığılma noktası vardır, çünkü dizinin sonsuz sayıda terimi  $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$  aralığına aittir.
- ç) dizisinin 1 ve -1 olmak üzere, iki yığılma noktası vardır, çünkü dizinin sonsuz sayıda terimi  $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$  ve  $(-1 - \varepsilon, -1 + \varepsilon)$  aralıklarına aittir.
- d) dizisinin yığılma noktası yoktur.

Sonuçlar görsel gösterime göre elde edilmiştir ve ispatlanmayacaktır.

**Tanım:**  $(a_n)$  dizisi, her  $\varepsilon > 0$  için,  $n > n_0$  olduğunda  $|a_n - a| < \varepsilon$  eşitsizliğini sağlayan  $n_0(\varepsilon)$  doğal sayısı için bir  $a \in \mathbb{R}$  reel sayısı varsa diziye **yakınsak (limit değeri olan)** dizi olarak adlandırılır.

$a$  reel sayısına  $(a_n)$  dizisinin limit değeri olarak adlandırılır ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  biçiminde yazılır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0(\varepsilon)) |a_n - a| < \varepsilon$$

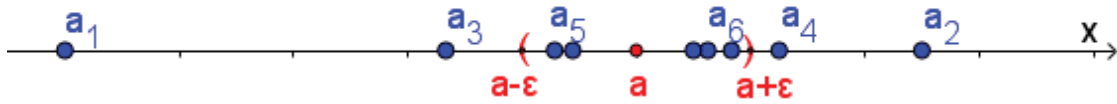
Yukarıdakine denk olan bir tanım daha yazılabilir.

**Tanım:**  $(a_n)$  dizisinde  $n$  sonsuza varırken (yaklaşırken),  $a$  noktasının herhangi bir  $\varepsilon$  komşuluğunda dizinin sonsuz sayıda terimi varsa ve bu komşuluğun dışında yalnızca sonlu sayıda terim varsa  $a$  sayısına  $(a_n)$  dizisinin limit değeridir denir.

Bunu şu şekilde yazıyoruz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Tanımdan şu sonuç elde edilir: Bir dizinin limit değeri varsa,  $n_0$  noktasından başlayarak  $a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, a_{n_0+3}, \dots$  sonsuz sayıda terim  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  aralığının içinde yer alır ve yalnızca sonlu sayıda terim (ilk  $n_0$  terim) bu aralığın dışındadır.  $a$  sayısı aynı zamanda dizinin yığılma noktasıdır.



**Tanım:** Yakınsak olmayan  $(a_n)$  dizisi, ıraksak (divergent) dizi olarak adlandırılır.

Limit değeri  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  ya da  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  olan  $(a_n)$  dizisine ıraksak dizi denir.

Dizilerin yakınsaklık açısından davranışı aşağıdaki infografikte görülebilir:

| Dizi     |                      |                   |                                 |
|----------|----------------------|-------------------|---------------------------------|
| Yakındır | Yakınsak değildir    |                   |                                 |
|          | İraksaktır           |                   | Belirsiz ıraksaktır             |
|          | $+\infty$ 'a ıraksar | $-\infty$ ıraksar | Sonlu salınım    Sonsuz salınım |



Yakınsak olmayan dizilere örnek:

Genel terimi  $a_n = 2^n$  olan dizi için,  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty$  dir ve dizi  $+\infty$ 'a **ıraksar**.

Genel terimi  $a_n = -2n$  olan dizi için,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2n) = -\infty$ 'dır, dizi  $-\infty$ 'a **ıraksar**.

Genel terimi  $a_n = (-1)^n$  olan dizi için,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$  yoktur, dizinin değerleri 1 ve -1 arasında **sonlu olarak salınım yapar**.

$a_n = (-1)^n n$  genel terimli dizi için,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n$  yoktur, dizinin değerleri sonsuz olarak salınım yapar  $-\infty$  ve  $+\infty$ 'a **varıyorlar**.

**Örnek 2:**  $\left(\frac{1}{n}\right)$  dizisinin lim değeri 0, yani  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  olduğunu tanım gereğince ispatlayalım ve

$\varepsilon = \frac{1}{10}$  için  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  . komşuluğunun dışında kalan terimlerin sayısını belirtelim.

**Çözüm:** Genel terimi  $a_n = \frac{1}{n}$  olan dizi verilmiştir ve dizinin sınır değerinin  $a = 0$  olduğu kanıtlanmalıdır.

$\varepsilon > 0$  yeterince küçük, keyfi seçilmiş bir reel sayı olsun. O zaman  $|a_n - a| < \varepsilon$  ifadesinden:

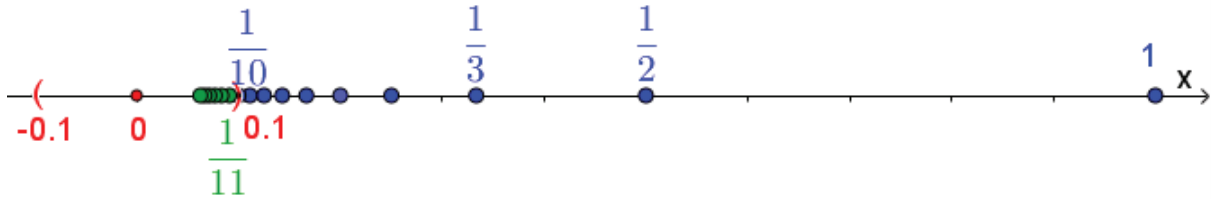
$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon, \text{ yani } \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ elde edilir.}$$

Buradan  $n > \frac{1}{\varepsilon}$  olduğu sonucu elde edilir.

$\frac{1}{\varepsilon}$  bir doğal sayı ise,  $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$  dir, ya da  $\frac{1}{\varepsilon}$  pozitif bir reel sayı ise,  $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$  'dir (pozitif reel sayının tam kısmı).

$$\varepsilon = \frac{1}{10} \text{ için, } n_0 = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\frac{1}{10}} = 10 \text{ elde edilir.}$$

$10$ 'a eşit veya daha küçük indisli  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$  terimler  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  aralığının dışındadır ve  $10$ 'dan büyük indisli terimler  $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots$   $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  aralığındadır. Yani,  $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{10}$  (dizinin sonlu sayıda terimi)  $\left(0 - \frac{1}{10}, 0 + \frac{1}{10}\right) = (-0,1; 0,1)$  aralığının dışındadır ve  $\frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \dots$  (dizinin sonsuz sayıda terimi)  $(-0,1; 0,1)$  aralığındadır.



**Örnek 3:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$  olduğunu tanım gereği kanıtlayalım ve  $\varepsilon = \frac{1}{100}$  için  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  komşuluğunun dışında kalan terimlerin sayısını belirtelim.

**Çözüm:**  $a_n = \frac{n}{2n+1}$  dizisinin limit değerinin  $a = \frac{1}{2}$  olduğu kanıtlanmalıdır.

$\varepsilon > 0$  yeterince küçük, seçilmiş herhangi bir reel sayı olsun. O zama  $|a_n - a| < \varepsilon$ 'dan şunlar elde edilir:

$$\left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \frac{2n - 2n - 1}{2(2n+1)} \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \frac{-1}{4n+2} \right| < \varepsilon,$$

$$\text{Yani } \frac{1}{4n+2} < \varepsilon$$

$$4n+2 > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ yani } n > \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon} = n_0(\varepsilon) \text{ elde edilir.}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{100} \text{ ise, } n_0 = \frac{1 - 2 \cdot \frac{1}{100}}{\frac{4}{100}} = \frac{1 - \frac{1}{50}}{\frac{1}{25}} = \frac{\frac{49}{50}}{\frac{1}{25}} = \frac{49}{2} \text{ yani } n_0 = \left\lceil \frac{49}{2} \right\rceil = 24 \text{ elde edilir. Dizinin ilk 24}$$

terimi aralığın dışındadır ve 25 ve daha büyük indisli terimleri  $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{100}; \frac{1}{2} + \frac{1}{100}\right) = (0,49; 0,51)$  aralığındadır.

**Örnek 4:**  $a_n = \frac{n}{4n+1}$  dizisi verilmiştir. Bu dizinin limit değerinin  $\frac{1}{4}$  olduğunu gösterelim.  $n$ 'nin hangi değerleri için  $\left|a_n - \frac{1}{4}\right| < 0,01$  eşitsizliği sağlanır?

**Çözüm:**  $a_n = \frac{n}{4n+1}$  genel terimi ile verilmiş olan dizinin limit değeri  $\frac{1}{4}$  olduğunu göstermek için  $\varepsilon > 0$  için  $\left|a_n - \frac{1}{4}\right| < \varepsilon$  olduğunu göstermeliyiz. O halde

$$\left|a_n - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{n}{4n+1} - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{4n - 4n - 1}{4(4n+1)}\right| = \frac{1}{4(4n+1)}$$

$$\left|a_n - \frac{1}{4}\right| < \varepsilon \text{ olduğuna göre } \frac{1}{4(4n+1)} < \varepsilon \text{ gerekir.}$$

$$\frac{1}{4(4n+1)} < \varepsilon \Leftrightarrow 1 < 4\varepsilon(4n+1) \Leftrightarrow 1 < 16n\varepsilon + 4\varepsilon \Leftrightarrow 16n\varepsilon > 1 - 4\varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1 - 4\varepsilon}{16\varepsilon}.$$

$\varepsilon = 0,01$  son eşitsizlikte değiştirmekle  $n > \frac{1 - 4 \cdot 0,01}{16 \cdot 0,01} = \frac{1 - 0,04}{0,16} = \frac{0,96}{0,16} = 6$ , elde edilir, yani  $n_0 = 6$ .

Verilen eşitsizlik, dizinin yedinci teriminden itibaren sağlanır.

**Örnek 5:**  $a_n = 2^{\frac{1}{n}}$  genel terimli dizinin limit değerini belirtelim.

**Çözüm:**  $a_n = 2^{\frac{1}{n}}$  genel terimli dizinin birkaç terimini yazalım:

$$n=1: \quad 2^1 = 2$$

$$\vdots$$

$$n=2: \quad 2^{\frac{1}{2}} = 1,41$$

$$n=10 \quad 2^{\frac{1}{10}} = 1,07$$

$$\vdots$$

$$n=3: \quad 2^{\frac{1}{3}} = 1,26$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \quad \text{ve} \quad 2^{\frac{1}{n}} > 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\vdots$$

Dizinin limit değeri tanımından şu sonuç elde edilir:

$$\left| 2^{\frac{1}{n}} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} \log 2 < \log(1 + \varepsilon)$$

$$2^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon / \log$$

$$n > \frac{\log 2}{\log(1 + \varepsilon)}$$

Yani, her  $\varepsilon > 0$  için, öyle bir doğal sayı  $n_0 = \frac{\log 2}{\log(1 + \varepsilon)}$  var ki,  $n > n_0$ ,  $|a_n - 1| < \varepsilon$  olacak ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$  dir.

**Not:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1, \forall a > 0$ .

**Teorem:**  $(a_n)$  dizisi yakınsak olduğu durumda, limit değeri tek olarak bellidir.

Teoremi ispatlamadan kullanacağız.

### Alıştırma Soruları:

1.  $a_n = \frac{2n}{4n+1}$  dizisi verilmiştir. Limit değerinin  $\frac{1}{2}$  olduğunu gösteriniz. Hangi  $n$ 'den itibaren  $\left| a_n - \frac{1}{2} \right| < 0,0001$  eşitsizliği sağlanır?
2.  $a_n = \frac{2n^2}{n^2-5}$  dizisi verilmiştir. Limit değerinin 2 olduğunu gösteriniz.  $|a_n - 2| < 0,1$  eşitsizliği hangi  $n$ 'den itibaren sağlanır?
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$  olduğunu tanım gereği kanıtlayın ve  $\varepsilon = \frac{1}{100}$  için  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  komşuluğunun dışında kalan terimlerin sayısını belirtiniz.

4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2$  olduğunu tanım gereği kanıtlayın ve  $\varepsilon = \frac{1}{10}$  için  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  komşuluğunun dışında kalan terimlerin sayısını belirleyin.

5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2-1} = \frac{1}{2}$  olduğunu tanım gereği kanıtlayın.  $|a_n - a| < 0,01$  eşitsizliği hangi  $n$ 'den itibaren sağlanır?

6.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-2}{n^2+1} = 3$  olduğunu tanım gereği kanıtlayın.

7.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2+3}{1-2n^2} = -\frac{5}{2}$  olduğunu tanım gereği kanıtlayın.  $|a_n - a| < 0,01$  eşitsizliği hangi  $n$ 'den itibaren sağlanır?

8.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-3n+4}{2n^2+3} = \frac{1}{2}$  olduğunu tanım gereği kanıtlayın.  $|a_n - a| < 0,01$  eşitsizliği hangi  $n$ 'den itibaren sağlanır?

9.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{5n+2} = \frac{3}{5}$  olduğunu tanım gereği kanıtlayın.  $\left|a_n - \frac{3}{5}\right| < 0,001$  eşitsizliğini sağlayan  $n$ 'yi bulunuz.

10.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-3n}{2n} = -\frac{3}{2}$  olduğunu tanım gereği kanıtlayın.  $\left|a_n + \frac{3}{2}\right| < 0,1$  eşitsizliğini sağlayan  $n$ 'yi bulun.

11.  $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$  genel terimli dizi verilmiştir.

a) Dizinin ilk altı terimini yazın.

b) Terimleri sayı doğrusunda gösterin.

c) Dizinin monoton olup olmadığını kontrol edin.

ç) Dizinin sınırlı olup olmadığını kontrol edin.

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$  olduğunu tanım gereği kanıtlayınız.

e)  $|a_n - 1| < 0,001$  eşitsizliğini sağlayan  $n$ 'nin değerini bulunuz.

## 7. YAKINSAK DİZİLERLE İŞLEMLER

Bu bölümde, terimleri yakınsak dizilerin terimlerinden elde edilen diziler oluşturulacak ve yakınsak dizilerin sınır değerlerini bilerek bu dizilerin sınır değerlerini belirleme kuralları verilecektir.

**Teorem:**  $(a_n)$  ve  $(b_n)$  dizileri yakınsak olsun ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  olsun. O halde

$(a_n + b_n)$ ,  $(a_n - b_n)$ ,  $(a_n \cdot b_n)$ ,  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  dizileri de yakınsaktır ve şu özellikler geçerlidir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n\right) = a \cdot b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (k \cdot a_n) = k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k \cdot a, \quad k \in \mathbb{R}$$

**İspat:**

Teoremin sadece bir kısmını, yani  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a + b$  olduğunu kanıtlayacağız.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  ve  $\varepsilon > 0$  olsun.

$n_1 \in \mathbb{N}$ ,  $(a_n)$  dizisinin tüm terimleri  $a$ 'nın  $\varepsilon$ -komşuluğunda bulunur.

$n_2 \in \mathbb{N}$  için,  $(b_n)$  dizisinin tüm terimleri  $b$ 'nin  $\varepsilon$ -komşuluğunda bulunur.

$n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  olsun. O zaman  $n \geq n_0$  için  $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$  ve  $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$  geçerlidir. Üçgen eşitsizliğinden:

$|a_n + b_n - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$  olduğunu buluyoruz. Buradan,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$  elde edilir.

Teoremden ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  dizisinin limit değeri kullanılarak, ispatlanmaya gerek kalmadan dizilerin limit değerleri hesaplanabilir.

**Örnek 1:** Genel terimi  $a_n = 2 + \frac{1}{n}$  olan dizinin limit değerini hesaplayınız.

**Çözüm:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 2 + 0 = 2$

Örnek 2:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{3n^2 + 4}$  değerini hesaplayınız.

**Çözüm:** Payı ve paydayı  $n$ 'nin en yüksek derecesiyle böleceğiz (veya  $n$ 'nin en yüksek derecesini parantez dışına alacağız) ve ardından teoremi uygulayacağız.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{3n^2 + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2 + n}{n^2}}{\frac{3n^2 + 4}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{4}{n^2}} = \frac{1 + 0}{3 + 0} = \frac{1}{3}.$$

Örnek 3:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 1}{2n^2 + 3n}$  değerini hesaplayınız.

**Çözüm:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 1}{2n^2 + 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4n - 1}{n^2}}{\frac{2n^2 + 3n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{n} - \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{0}{2 + 0} = \frac{0}{2} = 0.$

Örnek 4: Genel terimi  $a_n = \frac{3n^3 + 2n^2 + 5}{2n^3 - n + 1}$  olan dizinin limit değerini hesaplayınız.

**Çözüm:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 2n^2 + 5}{2n^3 - n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left( \frac{3n^3}{n^3} + \frac{2n^2}{n^3} + \frac{5}{n^3} \right)}{n^3 \left( \frac{2n^3}{n^3} - \frac{n}{n^3} + \frac{1}{n^3} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^3}}{2 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} = \frac{3}{2}$$

$(p^n)$  geometrik dizinin limit değeri,  $p$ 'nin değerine bağlı olarak:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^n = \begin{cases} \text{yoktur,} & p \leq -1 \\ 0, & -1 < p < 1 \\ 1, & p = 1 \\ +\infty, & p > 1 \end{cases}$$

Örnek 5:  $(p^n)$  geometrik dizinin limit değerini kullanarak  $a_n = \frac{5^{n+1} + 7^{n+2}}{5^n + 7^{n+1}}$  genel terimli dizinin limit değerini bulunuz.

**Çözüm:**

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} + 7^{n+2}}{5^n + 7^{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 5^n + 49 \cdot 7^n}{5^n + 7 \cdot 7^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5 \cdot 5^n + 49 \cdot 7^n}{7^n}}{\frac{5^n + 7 \cdot 7^n}{7^n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^n + 49 \cdot 1^n}{\left(\frac{5}{7}\right)^n + 7 \cdot 1^n} = \frac{5 \cdot 0 + 49 \cdot 1}{0 + 7 \cdot 1} = \frac{49}{7} = 7\end{aligned}$$

**Örnek 6.** Genel terimi verilmiş olan dizinin limitini hesaplayınız:

a)  $a_n = \frac{1}{4^n}$

b)  $a_n = \frac{1-2^n}{3+2^{n+1}}$

**Çözüm:**

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

$$\begin{aligned}\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2^n}{3+2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2^n}{3+2^n \cdot 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1-2^n}{2^n}}{\frac{3+2^n \cdot 2}{2^n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 \cdot 2} = \frac{0-1}{0+2} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

**Örnek 7.** Verilen dizilerin limitlerini hesaplayınız:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + n^2 - 7n + 5}{3n^3 + 2n^2 - 5n + 8}$  b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n}{n+1} - \frac{3n+1}{4n-3} \right)$  c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n})$

**Çözüm:**

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + n^2 - 7n + 5}{3n^3 + 2n^2 - 5n + 8} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left( \frac{2n^3}{n^3} + \frac{n^2}{n^3} - \frac{7n}{n^3} + \frac{5}{n^3} \right)}{n^3 \left( \frac{3n^3}{n^3} + \frac{2n^2}{n^3} - \frac{5n}{n^3} + \frac{8}{n^3} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n} - \frac{7}{n^2} + \frac{5}{n^3}}{3 + \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + \frac{8}{n^3}} = \frac{2}{3}$$



$$\begin{aligned}
\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n}{n+1} - \frac{3n+1}{4n-3} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(4n-3) - (3n+1)(n+1)}{(n+1)(4n-3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2 - 6n - 3n^2 - 4n - 1}{(n+1)(4n-3)} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 10n - 1}{4n^2 + n - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left( \frac{5n^2}{n^2} - \frac{10n}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left( \frac{4n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2} - \frac{3}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{10}{n} - \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}} = \frac{5}{4} \\
\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n}) \cdot \frac{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n})(\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n})}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2n+3})^2 - (\sqrt{2n})^2}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3-2n}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}} = 0
\end{aligned}$$

**Örnek 8:** Genel terimi verilmiş olan dizinin limitini hesaplayınız:

$$\text{a) } a_n = \frac{n+3}{\sqrt{n^2-7}}, \quad \text{b) } a_n = \frac{(n+1)^2 - (n+2)^2}{(n-1)^2 - (n-2)^2}, \quad \text{c) } a_n = \frac{(n+1)! + n!}{(n+1)! - n!}$$

**Çözüm:**

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! + n!}{(n+1)! - n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot n! + n!}{(n+1) \cdot n! - n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1+1)}{n!(n+1-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n} = 1$$

Dizilerin yakınsaklığını belirlerken, terimleri aynı sınır değerine sahip iki yakınsak dizi arasına yerleştirme yöntemi de sıklıkla kullanılır. Bu yöntem, aşağıdaki teoremden verilmiştir.

**Teorem (Sandviç Teoremi):**  $(y_n)$  ve  $(z_n)$  dizileri için,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c \in \mathbb{R}$  olsun. Her  $n$  için  $y_n \leq x_n \leq z_n$  ise,  $(x_n)$  dizisinin de bir sınır değeri vardır ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ 'dir.

**Örnek 9:** Genel terimli  $x_n = \sqrt[n]{5^n + 7^n}$  olan dizinin limit değerini hesaplayınız.

**Çözüm:**

$7^n \leq 5^n + 7^n \leq 7^n + 7^n$ , yani  $7^n \leq 5^n + 7^n \leq 2 \cdot 7^n$  olsun. Buradan  $7 \leq \sqrt[n]{5^n + 7^n} \leq \sqrt[n]{2} \cdot 7$  elde ederiz.

$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$  olduğuna göre,  $\lim_{n \rightarrow \infty} 7 = 7$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2^{\frac{1}{n}} \cdot 7 \right) = 1 \cdot 7 = 7$  elde edilir. Buna göre,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n + 7^n} = 7$  olduğunu buluyoruz.

**Örnek 10:** Genel terimi  $y_n = 1 - \frac{1}{n}$  olan dizinin birkaç terimini yazınız ve limit değerini belirtiniz.

**Çözüm:**  $y_n = 1 - \frac{1}{n}$  olsun. O halde:

$$y_1 = 1 - \frac{1}{1} = 0, y_2 = 1 - \frac{1}{2} = 0,5, \dots, y_{10} = 1 - \frac{1}{10} = 0,9, \dots, y_{100} = 1 - \frac{1}{100} = 0,99,$$

$n \rightarrow \infty$  olduğunda,  $y_n \rightarrow 1$  olur. Buradan  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) = 1$  sonucuna varabiliriz.

**Örnek 11:** Genel terimi  $z_n = 1 + \frac{1}{n}$  olan dizinin birkaç terimini yazın ve limit değerini belirtiniz.

**Çözüm:**  $z_n = 1 + \frac{1}{n}$  olsun. O halde:

$$z_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2, z_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1,5, \dots, z_{10} = 1 + \frac{1}{10} = 1,1, \dots, z_{100} = 1 + \frac{1}{100} = 1,01,$$

$n \rightarrow \infty$  olduğunda,  $z_n \rightarrow 1$ 'e varır. Buradan  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = 1$  sonucuna varabiliriz.

Aşağıda, dizilerin karakteristik bir limit değerini göreceğiz.

**Örnek 12:** Genel terimi  $x_n = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$  olan dizinin limit değerini hesaplayalım.

**Çözüm:**  $x_n = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$  olsun. O halde:

$$x_1 = \left( 1 + \frac{1}{1} \right)^1 = 2, x_2 = \left( 1 + \frac{1}{2} \right)^2 = 2,25, \dots, x_{10} = \left( 1 + \frac{1}{10} \right)^{10} = 2,59374246, \dots,$$

$$x_{100} = \left( 1 + \frac{1}{100} \right)^{100} = 2,70475832, \dots, x_{1\,000\,000} = \left( 1 + \frac{1}{1\,000\,000} \right)^{1\,000\,000} = 2,71828314...$$

Sezgisel olarak,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  sonucuna varabiliriz. Bu sınır değerini ispatlamadan kullanacağız.

**Not:**

$e$  sayısı Neper sayısı olarak da adlandırılır ve doğal logaritmaların tabanı olarak kullanılır.

$e$  sayısı irrasyonel bir sayıdır ve yaklaşık değeri  $e \approx 2.72$ 'dir.

$e$  sayısının ilk 29 ondalık basamağı şunlardır:

$$e \approx 2,718281828459045235360287471352$$

**Örnek 13:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  limitini kullanarak aşağıdaki limit değerlerini belirtiniz:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}$  ;

**Çözüm:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = e$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4n+1}\right)^{2n-2}$

**Çözüm:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4n+1}\right)^{2n-2} = \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4n+1}\right)^{4n+1} \right]^{\frac{2n-2}{4n+1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-2}{4n+1}} = e^{\frac{1}{2}}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n$

**Çözüm:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n+2}{n-3} - 1\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n+2-n+3}{n-3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n-3}\right)^n =$

$$= \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n-3}{5}}\right)^{\frac{n-3}{5}} \right]^{\frac{5n}{n-3}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n-3}} = e^5$$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^n$

**Çözüm:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n+2-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n+2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{-2} = e \cdot 1^{-2} = e$$

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n$

**Çözüm:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{4}}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{4}}\right)^{\frac{n}{4} \cdot 4} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{4}}\right)^{\frac{n}{4}} \right)^4 = e^4$

f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+1}{4n+3}\right)^n$

**Çözüm:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+1}{4n+3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+3-2}{4n+3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+3}{4n+3} - \frac{2}{4n+3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{4n+3}\right)^n =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{4n+3}{-2}}\right)^{\frac{4n+3}{-2} \cdot \frac{-2n}{4n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{4n+3}{-2}}\right)^{\frac{-2n}{4n+3}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{-2n}{4n+3}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{4n+3}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e}$$

### Tekrarlama alıştırmaları

Genel terimiyle verilmiş olan şu dizilerin limitini hesaplayınız:

1.  $a_n = \frac{4n-1}{2n+3},$

2.  $a_n = \frac{7-5n}{10n}$

3.  $a_n = \frac{n^2+2n-3}{n^2-n+4}$

4.  $a_n = \frac{n^5 - 4}{n + 3n^5}$

5.  $a_n = \frac{3n - 2}{n^2 - 4n}$

6.  $a_n = \frac{5n^2 - 3n}{2 - 3n^3}$

7.  $a_n = \frac{(2n - 3)(4n + 1)}{5n - 4}$

8.  $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n}}{3n - 4}$

9.  $a_n = \frac{3^n + 5^{n+1}}{5^n - 3^{n+2}}$

Verilen limitleri hesaplayınız:

10.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^4 + 3n^2 + 1}{2n^3 - n^2 + 2}$

11.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$

12.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}}$

13.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

14.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n-1}$

15.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-3n+2}$

16.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+5)! + (n+3)!}{(n+5)! - (n+3)!}$

17.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - n + 3} - \sqrt{n^2 + 5n - 6})$

18.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+1}{2n-1} \right)^n$

## 8. Sonsuz Geometrik Dizinin Terimlerinin Toplamı

Şu sonsuz geometrik diziyi ele alalım:  $a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \dots, a_1q^{n-1}, \dots$  Burada  $a = 1$  ilk terim ve  $q$  geometrik dizinin ortak çarpanıdır.

Şu diziyi oluşturalım:

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_1q,$$

$$S_3 = a_1 + a_1q + a_1q^2,$$

...

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1},$$

...

$(S_n)$  dizisinin yakınsak olduğunu, yani  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  olduğunu varsayalım, burada  $S$  sonlu bir reel sayıdır.

**Tanım:**  $(S_n)$  dizisinin limiti  $S$  değerine,  $a_1, a_1q, a_1q^2, \dots$  sonsuz geometrik dizisinin toplamı denir eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \text{ ise } a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} + \dots = S \text{ gerekir.}$$

Ortak çarpan  $q$ 'nun değerine bağlı olarak birkaç durumu ele alacağız, yani  $|q| = 1$ ,  $|q| < 1$  ve  $|q| > 1$ , ve  $S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1}$ .

1.  $|q| = 1$  olsun, yani  $q = 1$  veya  $q = -1$ .

1.1. Eğer  $q = 1$  ise:  $S_n = a_1 + a_1 \cdot 1 + a_1 \cdot 1^2 + \dots + a_1 \cdot 1^{n-1} = a_1 \cdot n$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$  olur.

1.2. Eğer  $q = -1$  ise:

$S_n = a_1 + a_1 \cdot (-1) + a_1 \cdot (-1)^2 + \dots + a_1 \cdot (-1)^{n-1} = a_1 - a_1 + a_1 - a_1 + \dots + a_1 \cdot (-1)^{n-1}$  olur ve  $n$  değerine bağlı olarak, toplam  $a = 1$  veya  $0$  olacaktır ve  $(S_n)$  dizisinin iki yığılma noktası vardır, yani  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  limitinin değeri yoktur.

2.  $|q| < 1$  olsun, o zaman sonsuz geometrik dizinin ilk  $n$  teriminin toplamı:

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{q^n}{q - 1} + a_1 \frac{-1}{q - 1}, \text{ yani } S_n = a_1 \frac{q^n}{q - 1} + a_1 \frac{1}{1 - q} \text{ elde edilir.}$$

$$|q| < 1 \text{ olduğunda } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \text{ dir, dolayısıyla } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_1 \frac{q^n}{q - 1} + a_1 \frac{1}{1 - q} \right) = \frac{a_1}{1 - q} \text{ elde edilir.}$$

Buna göre,  $(S_n)$  dizisinin yakınsak olduğu ve sonsuz geometrik dizinin terimlerinin toplamının şu şekilde kısaltılarak yazılabileceği sonucu elde edilir:

$$|q| < 1 \text{ için, } a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} + \dots = \frac{a_1}{1 - q} \text{ dir.}$$

3.  $|q| > 1$  olsun, o zaman  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$  ve  $(S_n)$  dizisi ıraksaktır.

Buradan,  $|q| > 1$  için sonsuz geometrik dizinin toplamının mevcut olmadığı sonucu elde edilir.

**Örnek 1:**  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots$  geometrik dizisinin toplamını belirtelim.

**Çözüm:**  $a_1 = 1, q = \frac{1}{2}$ , yani  $|q| < 1$  olduğundan, dizinin toplamı:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

**Örnek 2:**  $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots$  toplamını belirtelim.

**Çözüm:** Toplamı sonsuz bir geometrik dizinin terimleri olarak ele alırsak,  $a_1 = \frac{1}{2}$  ve  $q = -\frac{1}{2}$  olduğunu görüyoruz, yani  $|q| < 1$  olur ve toplamı şu şekilde hesaplayabiliriz:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

**Örnek 3:** 0.777... periyodik (devirli) ondalık sayısını sonsuz bir geometrik dizinin terimlerinin toplamı olarak ifade ediniz ve ardından bu toplamı hesaplayınız.

**Çözüm:**

$$\begin{aligned}
0,777... &= 0,7 + 0,07 + 0,007 + ... = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + ... = \\
&= 7 \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + ... \right) = 7 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 7 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = 7 \cdot \frac{1}{9} = \frac{7}{9}
\end{aligned}$$

**Örnek 4.** 21,3(54) devirli sayıyı, en sade şekilde bir kesir olarak gösterelim.**Çözüm:**

$$\begin{aligned}
21,3(54) &= 21,3545454... = 21 + 0,3 + 0,054 + 0,00054 + ... = \\
&= 21 + \frac{3}{10} + \frac{54}{10^3} + \frac{54}{10^5} + \frac{54}{10^7} + ... = 21 + \frac{3}{10} + \frac{\frac{54}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \\
&= 21 + \frac{3}{10} + \frac{\frac{54}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = 21 + \frac{3}{10} + \frac{\frac{54}{1000}}{\frac{99}{100}} = 21 + \frac{3}{10} + \frac{6}{11 \cdot 10} = \\
&= \frac{21 \cdot 110 + 3 \cdot 11 + 6}{11 \cdot 10} = \frac{2349}{110}
\end{aligned}$$

**Örnek 5.**  $2 + \frac{8}{5} + \frac{32}{25} + \frac{128}{125} + ... = 15 - \frac{15}{2} + \frac{15}{4} - \frac{15}{8} + ...$  eşitliğini ispatlayalım.**Çözüm:** Öncelikle, iki sonsuz geometrik dizinin toplamını ayrı ayrı hesaplamamız gerekiyor.Sol tarafta,  $a_1 = 2$  ve  $q = \frac{4}{5}$  olan sonsuz bir geometrik dizinin toplamı vardır:

$$2 + \frac{8}{5} + \frac{32}{25} + \frac{128}{125} + ... = \frac{2}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{2}{\frac{1}{5}} = 10$$

Sağ tarafta,  $a_1 = 15$  olan sonsuz bir geometrik dizinin toplamı vardır.



$$q = -\frac{1}{2} \text{ ve } 15 - \frac{15}{2} + \frac{15}{4} - \frac{15}{8} + \dots = \frac{15}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{15}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{15}{\frac{3}{2}} = 10$$

Görüldüğü gibi, iki sonsuz geometrik dizisinin toplamı eşittir. Bununla teorem ispatlanmıştır.

**Örnek 6:** Sonsuz geometrik dizinin toplamı 4 ve ikinci terimi  $a_2 = \frac{3}{4}$ 'tür. Geometrik diziye belirtiniz.

**Çözüm:** Verilen bilgilere göre,  $S = 4$ , yani  $\frac{a_1}{1-q} = 4$  ve  $a_2 = \frac{3}{4}$ , yani  $a_1 q = \frac{3}{4}$  tür. Bu şekilde şu

$$\text{denklemler sistemi elde edilir: } \begin{cases} \frac{a_1}{1-q} = 4 \\ a_1 q = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4 - 4q \\ 4a_1 q = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4 - 4q \\ 4(4 - 4q)q = 3 \end{cases}$$

İkinci denklemden  $16q - 16q^2 = 3$ , yani  $16q^2 - 16q + 3 = 0$  elde ederiz.

Buna göre ortak çarpanın çözümü için  $q' = \frac{1}{4}$  ve  $q'' = \frac{3}{4}$  elde edilir.

Bunu birinci denklemde  $a_1 = 4 - 4q$  yerine koyarsak:

İlk çözüm için  $a_1' = 4 - 4 \cdot \frac{1}{4} = 3$ , yani geometrik dizi  $3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \dots$ , 'dir.

İkinci çözüm için  $a_1'' = 4 - 4 \cdot \frac{3}{4} = 1$ , yani geometrik dizi  $1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \dots$  elde edilir.

**Örnek 7:** Bir kenarı  $a$  olan eşkenar bir üçgende, köşeleri üçgenin kenarlarının orta noktaları olan eşkenar bir üçgen çizilir. İkinci üçgene benzer şekilde üçüncü bir üçgen çizilir ve bu böyle devam eder. Tüm üçgenlerin çevrelerinin toplamını hesaplayınız.



**Çözüm:** Köklü ifadelerin özelliklerinden yararlanarak şunu elde ediyoruz:

$$\begin{aligned} \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}} &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}} = \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[16]{2} \ldots = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{8}} \cdot 2^{\frac{1}{16}} \ldots = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots} = 2^{\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}} = 2^{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}} = 2^1 = 2 \end{aligned}$$

### Alıştırma Soruları:

1.  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots$  toplamını hesaplayın.

2.  $5 + \frac{5}{4} + \frac{5}{16} + \ldots$  toplamını hesaplayın.

3.  $4 + 7 + \frac{8}{3} + \frac{35}{8} + \frac{16}{9} + \frac{175}{64} + \ldots$  toplamını hesaplayın.

4. Sonsuz bir geometrik dizi için  $S = 10$  ve  $a_1 = 6$  verilmiştir. Ortak çarpanı  $q$ 'yu bulunuz.

5. Sonsuz bir geometrik dizi için  $S = 25$  ve  $q = \frac{4}{5}$  verilmiştir. İlk terim  $a_1$ 'i bulunuz.

6. Bir kenarı 2 olan eşkenar bir üçgende, köşeleri verilen üçgenin kenarlarının orta noktaları olmak üzere yeni bir eşkenar üçgen çizilir. İkinci üçgene benzer şekilde üçüncü bir üçgen çizilir ve bu böyle devam eder. Hesaplayınız:

a) Tüm üçgenlerin alanlarının toplamını,

b) Tüm üçgenlerin çevrelerinin toplamını.

7.  $\sqrt[3]{5\sqrt[3]{5\sqrt[3]{5\ldots}}}$  ifadesinin değerini hesaplayınız.

8.  $3\sqrt{7\sqrt{3\sqrt{7\sqrt{3\sqrt{7\ldots}}}}}$  ifadesinin değerini hesaplayınız.

9. 3.252525... sayısını sonsuz bir geometrik dizinin terimlerinin toplamı olarak ifade edin ve ardından toplamı hesaplayınız.

10. Sonsuz bir geometrik dizinin toplamını kullanarak 4.35(6) sayısını indirgenemez (en sade şekilde) bir kesir olarak ifade ediniz.

11. Sonsuz bir geometrik dizinin toplamını kullanarak 3.4(25) sayısını indirgenemez bir kesir olarak ifade ediniz.

**TEKRARLAMA VE PRATİK UYGULAMA SORULARI:**

1. Genel terimiyle verilmiş olan dizinin monotonluğu ve sınırlılığı belirtilsin:

$$a_n = \frac{2n}{n+1}$$

2. Genel terimiyle verilmiş olan dizinin monotonluğu ve sınırlılığı belirtilsin:

$$a_n = \frac{n^2}{n^2 - 2}$$

3. 2 ve 26 sayıları arasına, verilen sayılarla birlikte aritmetik bir dizi oluşturacak şekilde beş sayı ekleyiniz.

4. Bir geometrik dizinin ilk terimi 1 ve ortak çarpanı 2'dir. Dizinin bir terimi 512'dir. Bu terim dizinin kaçınıcı terimidir?

5.  $a_5 - a_3 = 36$  ve  $a_2 - a_4 = -18$  ise geometrik diziyi bulunuz.

6. Şehirde farklı ücretlendirme modellerine sahip iki taksi şirketi bulunmaktadır:

A: Başlangıç 100 dinar,

kilometre başına 50 denar

B: Başlangıç 0 dinar,

kilometre başına 60 denar

Marko'nun iş yerine 7 kilometre mesafesi varsa hangi taksi şirketini seçmelidir?

Talimat: Geçilen kilometreye bağlı olarak bir sayı dizisi yazın (10 terim).

Elde edilen dizi ne tür bir dizidir?

7. Bir bankaya 2000 euro yatırmak istiyorsunuz.

İlk banka size aylık %3 faiz teklif ediyor.

İkinci banka size aylık %2 faiz teklif ediyor, ancak her ay anapara faiz tutarı kadar artıyor.

Her iki modele göre de ilk yılın sonunda hesabınızda ne kadar para olacak?

Her iki modele göre de beşinci yılın sonunda hesabınızda ne kadar para olacak?

Paranızı hangi bankaya yatırmalısınız? Seçiminiz yıl sayısına bağlı mı?

8. İgor yaz tatilinde bir pizzacıda 14 gün çalışmak istiyor. Pizzacı sahibi ona iki ödeme seçeneği sunuyor:

A: 1. gün 100 denar,

2. gün 200 denar,

3. gün 300 denar,

4. gün 400 denar

...

B: 1. gün 1 denar,

2. gün 2 denar,

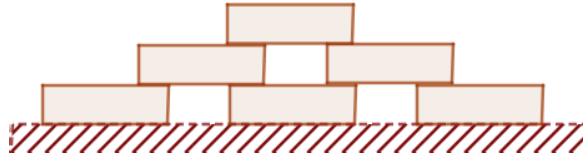
3. gün 4 denar,

4. gün 8 denar

...

a) İgor hangi modeli seçmelidir?

- b) Igor'un her iki modelde de ayrı ayrı ne kadar kazanacağını hesaplayınız.
9. 50.000 denar, her bir sonraki kişinin bir öncekinden 1000 dinar daha az aldığı 10 kişiye dağıtılmıştır. İlk kişi kaç denar almıştır ve son kişi kaç denar almıştır?
10. Bir bitkide başlangıçta 30 bakteri vardı ve sayıları her saat ikiye katlandı. İkinci, dördüncü ve dokuzuncu saatlerden sonra bitkide kaç bakteri olacaktır?
11. Tadey'in 2 ebeveyni, 4 büyükanne ve büyükbabası, 8 büyük büyükannesi ve büyükbabası vb. vardır. Tadey'in kendinden önceki beş nesilde kaç atası vardır?
- Siz kaç nesil atalarınızı biliyorsunuz? İsimlerini bir tabloya yazın.
12. 24 metre yüksekliğindeki bir sütundan bir top düşer ve her sıçramada düşülen mesafenin %3'üne ulaşır. Top yere nihayetinde durmadan önce ne kadar yol kat eder?
13. Yeni kripto para biriminin başlangıç fiyatı 5 dolardır. Her gün 2 dolar artarsa, 16 gün sonra kripto para biriminin fiyatı ne kadar olur?
14. Ünlü bir rock grubu yeni bir albüm çıkardı ve bir günde 100.000 kopya sattı. Albüm tüm listelerde zirvede ve her gün bir önceki günden 20.000 kopya daha fazla satıyor. Bir haftada kaç albüm kopyası satıldı?
15. Galiçica Milli Parkı'ndaki vahşi hayvan popülasyonu her yıl %2 artmaktadır. 2015'te popülasyon 1000 ise 2022'de vahşi hayvan popülasyonu ne kadar olacaktır?
16. Bir duvarın ilk sırasında 60 tuğla vardır ve her sonraki sırada bir öncekinden 3 tuğla daha az vardır. Onuncu sırada kaç tuğla vardır?
17. Avdi, verilen şemayı kullanarak küplerden bir piramit yapmak istiyor, ancak tabanda 12 küp olmasını istiyor.
- Avdi'nin piramidi yapmak için kaç küpe ihtiyacı vardır?
- Piramidin kaç sırası olacaktır?



18. Bir üçgenin kenarları bir geometrik dizinin terimleridir. Çevresi 19 ve kenarlarının karelerinin toplamı 133 ise üçgenin kenarlarını bulunuz.
19. Hesaplayınız: a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 5^{n+1}}{5^n - 2^{n+2}}$  b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n}{n^2 + 3n} - \frac{1}{n^2} \right)$
20. 0.124124124... periyodik ondalık sayısını sonsuz bir geometrik dizinin terimlerinin toplamı olarak ifade ediniz ve ardından toplamı hesaplayınız.

## MODÜLER ÜNİTE 2

### TEMEL FONKSİYONLAR

Bu modüler ünite de şunları öğreneceksiniz:

Fonksiyon kavramı (tanım kümesi, grafik, değer kümesi, sıfırlar, monotonluk, konvekslik)

Doğrusal fonksiyon

İkinci derece fonksiyon

Doğal üslü kuvvet fonksiyonu, rasyonel üslü kuvvet fonksiyonu, yani reel üslü kuvvet fonksiyonu

Üstel fonksiyon

Logaritmik fonksiyon

Ters fonksiyon kavramı

Fonksiyonun periyodikliği kavramı

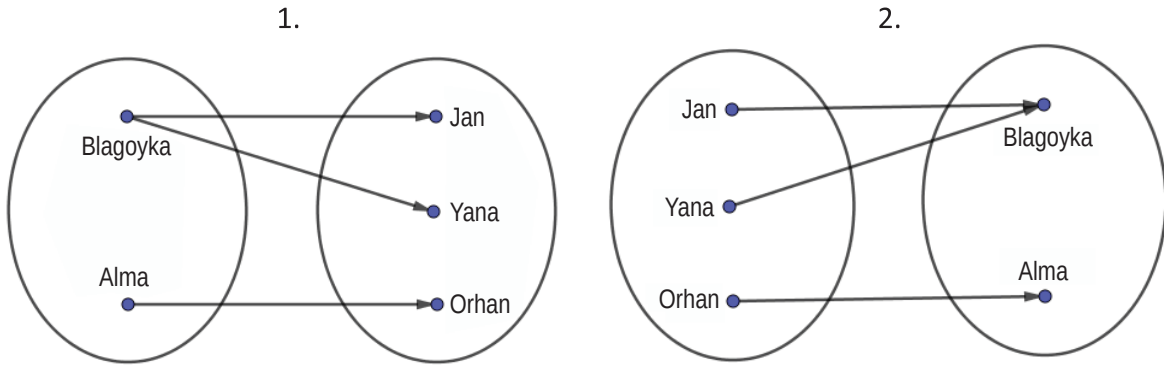
Temel trigonometrik fonksiyonlar

**TEMEL REEL FONKSİYONLAR****1. FONKSİYON KAVRAMI**

Aşağıda fonksiyonların temel özelliklerini inceleyeceğiz.

**Örnek 1:** Blagoyka ikizlerin annesidir, Jan ve Yana, Orhan ise Alma'nın oğludur. İlk diyagramda her anneye çocuğu eşleştirilmiştir. İkinci diyagramda her çocuğa annesi eşleştirilmiştir. Hangi diyagram bir eşleşmeyi temsil eder?

**Çözüm:**



**Tanım:**  $A$  ve  $B$  boş olmayan iki küme olsun ve  $A$ 'nın her  $x$  elemanına bir kural  $f$  ile tek olarak belli bir  $x \in B$  elemanı eşleştirelim. O zaman  $A$ 'dan  $B$ 'ye bir eşleme tanımlandığını söyleriz ve  $f: A \rightarrow B$  biçiminde yazarız.

Eşleme tanımını kullanarak, 2. diyagramın bir eşleme olduğunu sonucuna varabiliriz.

**Tanım:**  $X$  ve  $Y$ , reel sayılar kümesi  $\mathbb{R}$ 'nin alt kümeleri olsun. Her  $x \in X$  elemanına tek olarak belli bir  $y \in Y$  elemanı eşleştiren herhangi bir  $f: X \rightarrow Y$  eşlemesine reel fonksiyon denir.  $y = f(x)$  biçiminde işaret ediyoruz.

**Tanım:**  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonunun grafiği,  $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$  şeklindeki tüm sıralı çiftlerin kümesidir.

$X$  kümesinin elemanlarına argümanlar (orijinaller, bağımsız değişkenler) denir.

$f(x) \in Y$ 'ye görüntüler (bağımlı değişkenler) denir.

Fonksiyonlar analitik (formül, cebirsel gösterim), tablo, diyagram veya grafik olarak gösterilebilir.

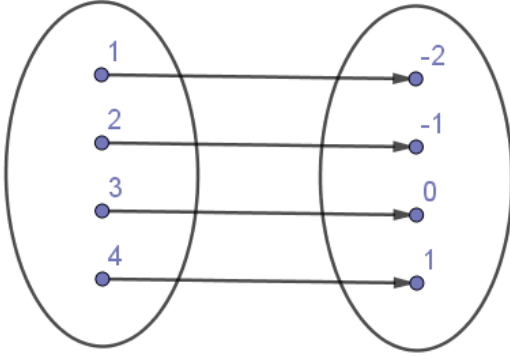
**Örnek 2:**  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  kümesindeki doğal sayılar 3 azaltılmalıdır. Fonksiyonu aritmetik olarak (eşleştirme kuralıyla), tablo, diyagram ve grafik olarak belirleyiniz ve yazınız.

Fonksiyonun analitik gösterimi:

$$f(x) = x - 3 \text{ për } A = \{1, 2, 3, 4\}, f : A \rightarrow B$$

$$B = \{-2, -1, 0, 1\}$$

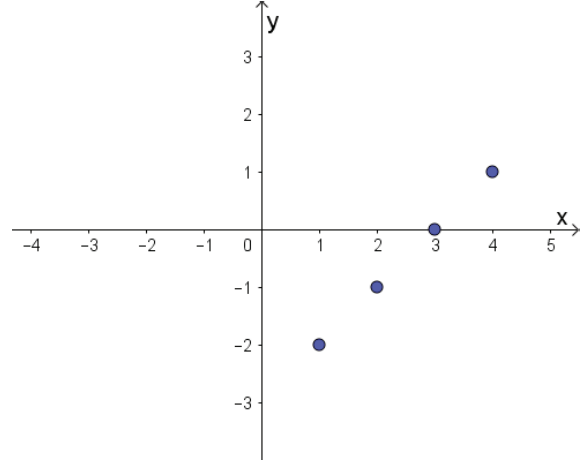
Fonksiyonun diyagram gösterimi



Fonksiyonun tablo gösterimi:

|   |    |    |   |   |
|---|----|----|---|---|
| x | 1  | 2  | 3 | 4 |
| y | -2 | -1 | 0 | 1 |

Fonksiyonun grafik gösterimi



### 1.1. FONKSİYONUN TANIM KÜMESİ

$f : X \rightarrow Y$ ,  $X, Y \subseteq \mathbb{R}$  reel fonksiyonu verilmiştir.

Fonksiyonun değişkeninin değerler aldığı reel sayılar kümesi  $D_f = X$ , yani fonksiyonun tanımlı olduğu küme, fonksiyonun **tanım kümesi** (domain) olarak adlandırılır ve  $D_f$  ile gösterilir.

**Fonksiyonun değerler kümesi** (kodomain) olan  $V_f \subseteq Y$  kümesi, tanım kümesinin elemanlarının tüm görüntülerinden oluşur, yani  $V_f = \{y \mid y = f(x), x \in X\}$ .

**Not:**  $y = f(x)$  fonksiyonu  $x = a$  değeri için tanımlıysa,  $f(a)$  vardır ve bu değer eşleme kuralına göre belirlenebilir demektir. Fonksiyon  $(a, b)$  aralığındaki her değer için tanımlıysa, fonksiyonun o aralıkta tanımlı olduğunu söyleriz. Tanım kümesi, fonksiyonun verildiği analitik ifadeye bağlı olarak belirlenir. Bir fonksiyonun tanım kümesi, reel sayılar kümesi veya aralık (açık, kapalı, yarı açık veya yarı kapalı), aralıkların birleşimi veya ayrık noktalar gibi alt kümelerinden biri olabilir.

Tanım kümesi  $D_f$  ve fonksiyonun değerini belirleyen kural bilindiği durumda,  $f(x)$  fonksiyonu tamamen bellidir.

Pratikte, verilen fonksiyon tanım kümesi belirtilmeden bir analitik ifade ile tanımlanmışsa, tanım kümesinin analitik ifadenin anlamlı olduğu tüm reel sayılardan oluştuğu varsayılır.



Aşağıda bazı özel fonksiyonların tanım kümelerini göreceğiz.

### Bazı Özel Fonksiyonların Tanım Kümeleri

#### 1.1.1. Polinom Fonksiyonun Tanım Kümesi

Eğer  $f(x)$  fonksiyonu  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  biçiminde bir polinom ile tanımlanmışsa, burada  $n$  negatif olmayan bir tam sayıdır, o zaman tanım kümesi tüm  $R$  reel sayılar kümesidir veya  $D_f = (-\infty, +\infty)$ .

**Örnek 1:** Şu fonksiyonlar:

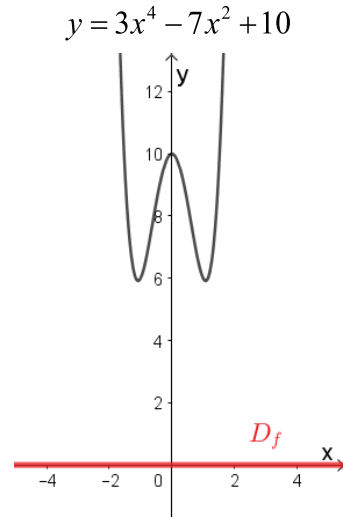
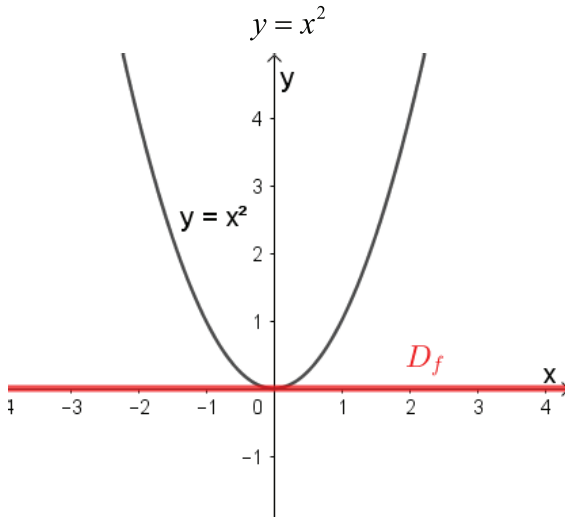
$$y = x^2,$$

$$y = 3x^4 - 7x^2 + 10,$$

$$y = -25x^7 + 4,5x^6 + x^3 - 12x + 5,$$

her reel sayı için tanımlıdır ve tanım kümeleri  $D_f = (-\infty, +\infty)$  veya  $D_f = R$  dir.

Şekillerde, ilk iki polinom fonksiyonunun tanım kümeleri grafiksel olarak gösterilmiştir.



**Not:** Kırmızı çizgi, tanım kümelerini, yani fonksiyonun değerinin hesaplanabileceği  $x$  değerlerini temsil eder.

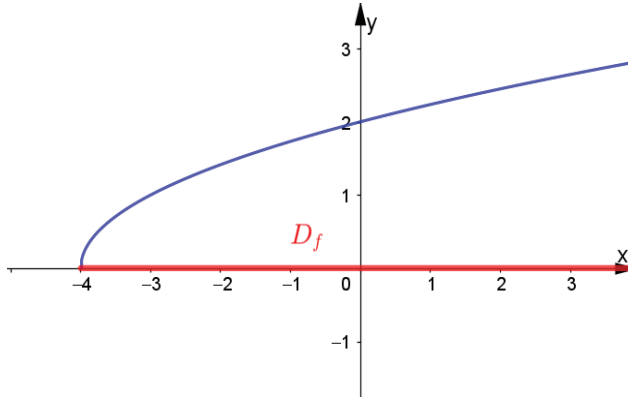
#### 1.1.2. Kök Üssü Çift Olan Fonksiyonun Tanım Kümesi

Eğer fonksiyon, kök üssü çift olan bir kök içindeyse,  $y = \sqrt[k]{f(x)}$ ,  $k \in N$ , o zaman tanım kümesi  $f(x) \geq 0$  eşitsizliğinden belirlenir.

**Örnek 2:**  $f(x) = \sqrt{x+4}$  fonksiyonunun tanım kümesini belirtiniz.

**Çözüm:** Tanım kümesi  $x + 4 \geq 0$  koşulundan belirlenir.

Bu eşitsizliği çözerek  $x \geq -4$  elde ederiz ve tanım kümesi  $D_f = [-4, +\infty)$  olur.



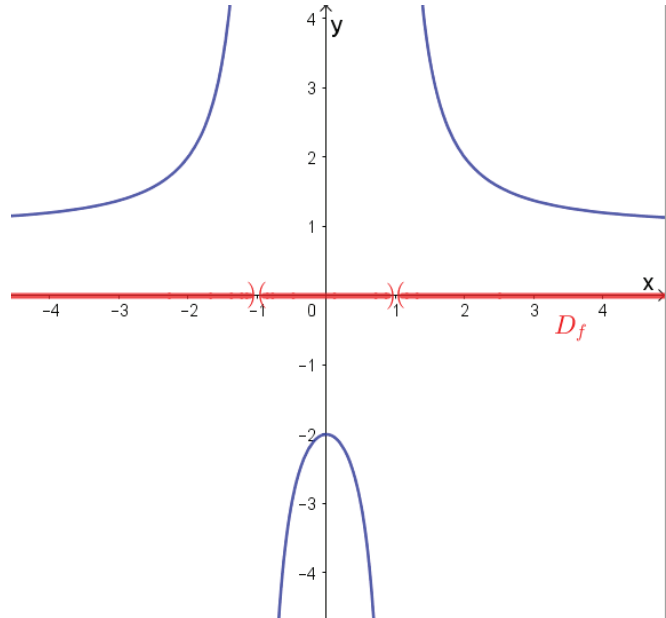
**Not:** Kök üssü tek sayı olan bir fonksiyonun tanım kümesi reel sayılar kümesidir.

### 1.1.3. Kesirli Rasyonel Fonksiyonun Tanım Kümesi

$y = \frac{f(x)}{g(x)}$  fonksiyonunun tanım kümesi  $g(x) \neq 0$  koşulundan belirlenir, çünkü 0 ile bölme tanımlı değildir.

**Örnek 3:**  $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}$  fonksiyonunun tanım kümesini belirtelim.

**Çözüm:** Tanım kümesi  $x^2 - 1 \neq 0$  koşulundan belirlenir, dolayısıyla  $x^2 \neq 1$  veya  $x^2 \neq 1$ , yani reel sayılar kümesinden  $x \neq \pm 1$  noktaları çıkarılır, o halde  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ , ya da  $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$  olmak üzere fonksiyon üç aralıkta tanımlıdır.



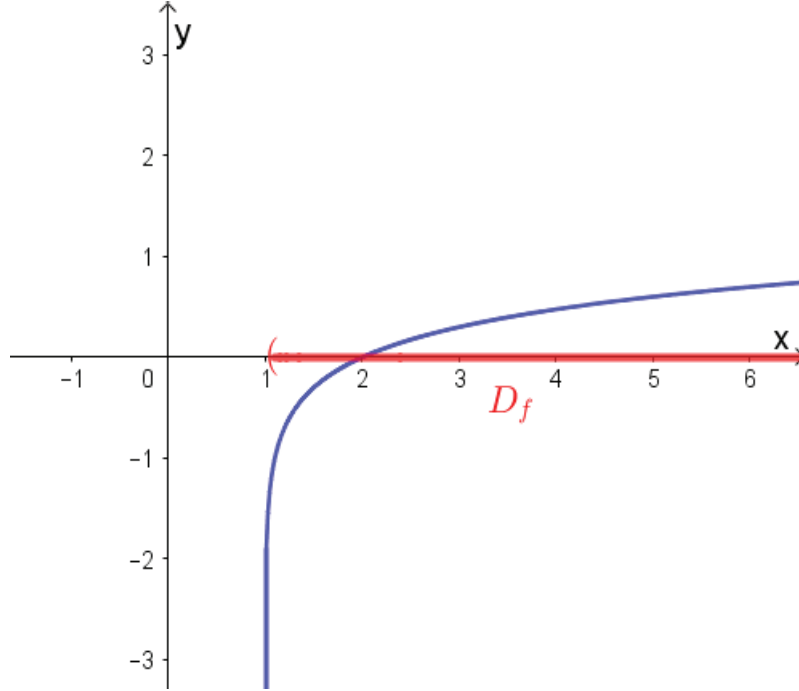
### 1.1.4. Logaritmik Fonksiyonun Tanım Kümesi

$y = \log_a f(x)$  logaritmik fonksiyonunun tanım kümesi  $f(x) > 0$  eşitsizliğinden belirlenir, çünkü logaritmlar yalnızca pozitif reel sayılar için tanımlıdır.

**Örnek 4:**  $f(x) = \log(x-1)$  fonksiyonunun tanım kümesini belirtelim.

**Çözüm:** Tanım kümesi  $x-1 > 0$  eşitsizliğinin çözümünden belirlenir.

Buradan  $x > 1$  elde edilir ve tanım kümesi  $D_f = (1, +\infty)$  olarak belirlenir.



**Alıştırma 1:** Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz:

a)  $f(x) = x^3 - 3x$

b)  $f(x) = \frac{x+5}{x^2-3x-4}$

c)  $y = \log(4-x)$

ç)  $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$

d)  $f(x) = \sqrt{5-3x}$

dh)  $f(x) = \sqrt[3]{x^2-4x+3}$

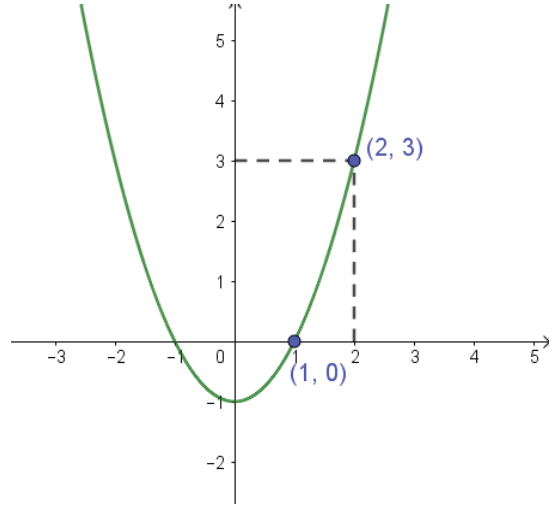
### 1.2. FONKSİYONUN SIFIRLARI

**Örnek 1:**  $f(x) = x^2 - 1$  fonksiyonu verilmiştir.  $f(1)$  ve  $f(2)$  fonksiyon değerlerini belirtiniz.

**Çözüm:**  $f(1)$  ve  $f(2)$  değerlerini buluyoruz.

$f(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$ , koordinatları  $(1, 0)$  olan ve fonksiyonun grafiğine ait bir nokta elde ederiz.

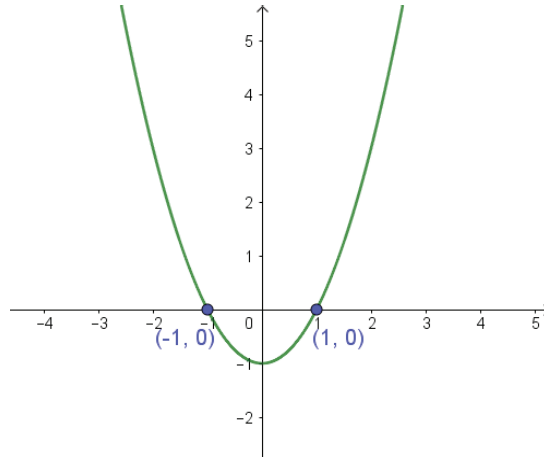
$f(2) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$ , koordinatları  $(2, 3)$  olan ve fonksiyonun grafiğine ait bir nokta elde ederiz.



$f(x_0) = 0$  geçerli olacak şekilde her  $x_0 \in D_f$  reel sayısına fonksiyonun **sıfırı** denir.

Fonksiyonun sıfırları  $f(x) = 0$  denkleminin çözümleridir.

$f(x) = 0$ , yani  $x^2 - 1 = 0$  denklemini çözerek, fonksiyonun sıfırları olan  $x_1 = -1$  ve  $x_2 = 1$  çözümlerini elde ederiz.



**Tanım:**  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonunun **sıfırları**,  $f(x) = 0$  olan  $x \in D_f$  değerleridir. Bunlar, fonksiyonun grafiğinin  $x$ - eksenini kestiği  $(x, 0)$  koordinatlı noktalardır. Verilen bir fonksiyonun sıfırları kümesini  $N_f$  ile göstereceğiz.

$y = f(x)$  fonksiyonunun değişkeni  $x = 0$  için değeri, fonksiyonun grafiğinin  $y$ - eksenile kesişim noktasının ikinci koordinatıdır. Noktanın koordinatları  $(0, y)$ 'dir.

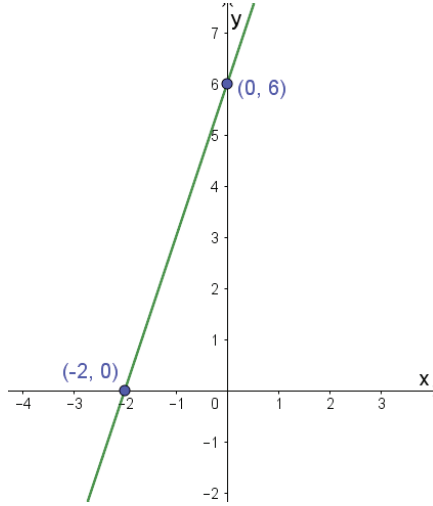
**Not:** Tek olarak belli şekilde tanımlanan bir fonksiyonun  $x$ - eksenile birden fazla kesişim noktası olabilir, ancak  $y$ - eksenile en fazla bir kesişim noktası olabilir.

**Örnek 2:**  $f(x) = 3x + 6$  fonksiyonunun sıfırlarını bulunuz ve fonksiyonun grafiğinin  $y$  eksenile kesişim noktasını belirtiniz.

**Çözüm:** Fonksiyonun sıfırları,  $f(x) = 0$  olan  $x$  değerleridir, dolayısıyla  $3x + 6 = 0$ 'dır. Denklemin çözümü  $x = -2$ 'dir. Fonksiyonun sıfırları kümesi  $N_f = \{-2\}$ 'dir.

Fonksiyonun  $y$ - eksenile kesişim noktasını bulmak için  $x = 0$  yerine koymamız gerekir, dolayısıyla  $f(0) = 3 \cdot 0 + 6 = 6$  elde ederiz. Fonksiyonun  $y$ - eksenile kesişim noktasının koordinatları  $(0, 6)$ 'dır. Fonksiyonun  $x$  eksenile kesişim noktası  $(-2, 0)$  koordinatlı noktadır.

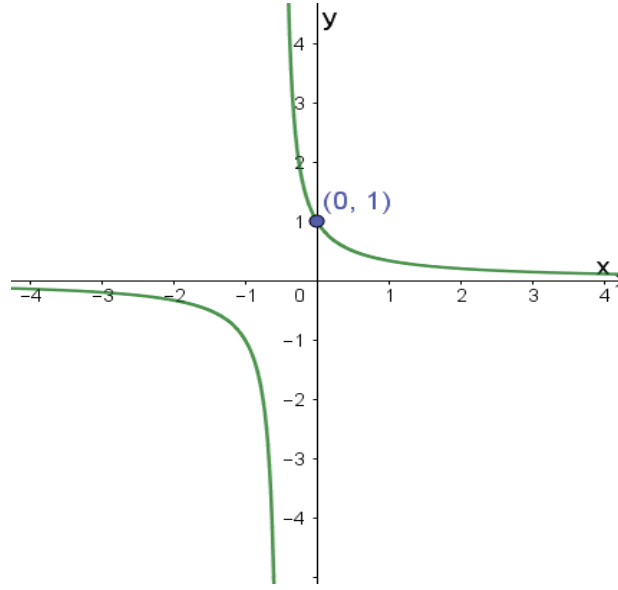
Fonksiyonun grafiksel gösterimi



**Örnek 3:**  $f(x) = \frac{1}{2x+1}$  fonksiyonunun sıfırlarını belirtiniz ve fonksiyonun  $y$ - eksenile kesişim noktasını bulunuz.

**Çözüm:**  $f(x) = 0$ 'dan  $1 = 0$  elde edilir, bu doğru olmadığına göre, denklemin çözümü olmadığı sonucuna varılır.

Sıfırların kümesi  $N_f = \emptyset$ , yani fonksiyon  $x$ - eksenini kesmez.



$x = 0$  yerine koyarsak,  $f(0) = \frac{1}{2 \cdot 0 + 1} = \frac{1}{1} = 1$  elde ederiz.  $y$ - eksenine kesişim noktasının koordinatları  $(0, 1)$ 'dir.

**Alıştırma 2:** Aşağıdaki fonksiyonların sıfırlarını bulunuz:

a)  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$

b)  $y = x^3 - x$

c)  $f(x) = 2^{x+5}$

ç)  $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$

d)  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

dh)  $f(x) = \sqrt{x(x-1)(x-2)}$

### 1.3. ÇİFT FONKSİYONLAR

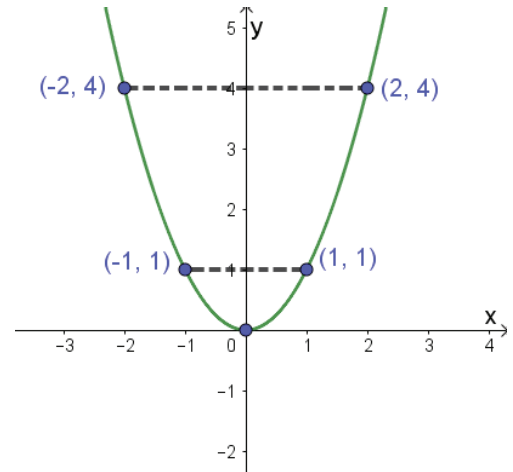
**Örnek 1:** Şekilde  $f(x) = x^2$  fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$f(-2), f(-1), f(1), f(2)$  değerleri hakkında ne fark edebiliriz?

$f(1) = f(-1) = 1, f(2) = f(-2) = 4$  elde edilir.

Genel olarak, her  $x \in D_f$  için verilen fonksiyonda  $f(-x) = f(x)$  geçerlidir.

$f(x) = x^2$  fonksiyonunun grafiği  $y$  eksenine göre simetriktir.



**Tanım:** Tanım kümesi  $D_f$  olan  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu (koordinat başlangıcına göre simetrik olan, yani her  $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$  olan),

- Her  $x \in D_f$  için  $f(-x) = f(x)$  geçerli ise fonksiyon **çifttir**,
- Her  $x \in D_f$  için  $f(-x) = -f(x)$  geçerli ise fonksiyon **tektir**.

**Not:** Fonksiyonların çiftliğini incelerken, öncelikle tanım kümesinin simetriklik koşulunun sağlanması gerekir. (Her  $x \in D_f$  için,  $-x \in D_f$  ise,  $D_f$  simetrik bir kümedir).

**Not:**

Çift fonksiyonun grafiği  $y$ - eksenine göre simetriktir.

Tek fonksiyonun grafiği koordinat başlangıcına göre simetriktir.

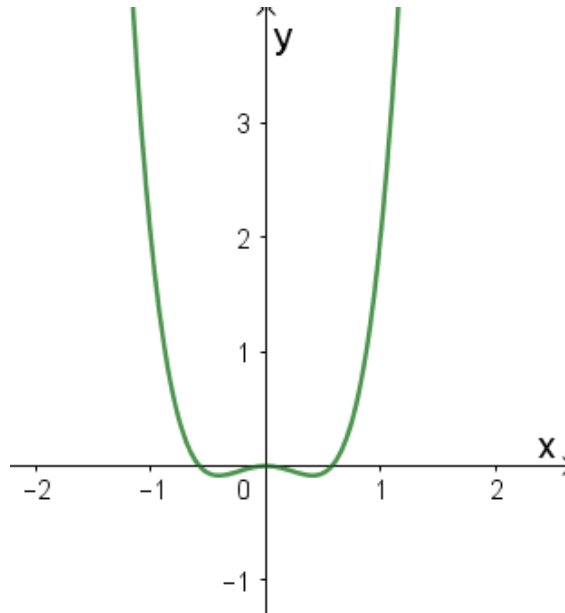
Ne çift, ne de tek olmayan fonksiyonlar da vardır.

**Örnek 2:**  $f(x) = 3x^4 - x^2$  fonksiyonunun çift olup olmadığını belirtiniz.

**Çözüm:** Tanım kümesi  $D_f = \mathbb{R}$ 'dir ve simetrik bir kümedir.

$$f(-x) = 3(-x)^4 - (-x)^2 = 3x^4 - x^2 = f(x)$$

Buradan fonksiyonun çift olduğu sonucu elde edilir. Grafik  $y$ - eksenine göre simetriktir.

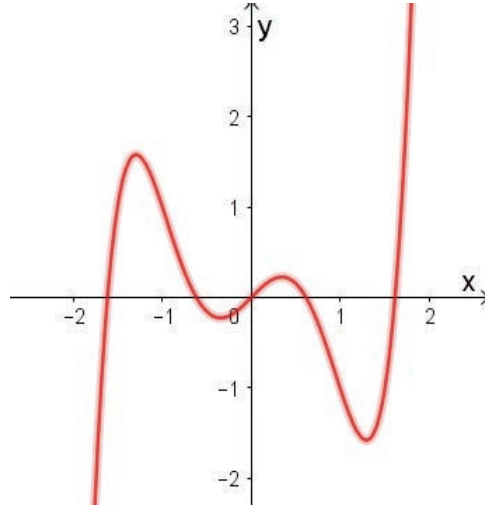


**Örnek 3:**  $f(x) = x^5 - 3x^3 + x$  fonksiyonunun çift ya da tek olup olmadığını belirtelim.

**Çözüm:** Tanım kümesi  $D_f = \mathbb{R}$ 'dir, bu simetrik bir kümedir.

$$f(-x) = (-x)^5 - 3(-x)^3 + (-x) = -x^5 + 3x^3 - x = -(x^5 - 3x^3 + x) = -f(x)$$

Dolayısıyla, fonksiyonun tek olduğu sonucu elde edilir. Fonksiyonun grafiği koordinat başlangıcına göre simetriktir.



**Alıştırma 3:** Aşağıdaki fonksiyonların çift ya da tek olup olmadığını belirtiniz:

a)  $f(x) = 3x^2 - 1$

b)  $f(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{x}$

c)  $f(x) = \frac{3x}{x-1}$

ç)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$

d)  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

dh)  $f(x) = 3x^5 + 2x^7$

#### 1.4. FONKSİYONUN SINIRLILIĞI

**Tanım:**  $f: R \rightarrow R$  fonksiyonu verilmiştir.  $f(x)$  fonksiyonu için:

- $f(x) \leq M$  olacak şekilde bir  $M$  reel sayısı varsa,  $f(x)$  fonksiyonu üstten sınırlıdır,
- $f(x) \geq m$  olacak şekilde bir  $m$  reel sayısı varsa,  $f(x)$  fonksiyonu alttan sınırlıdır,
- $m \leq f(x) \leq M$  olacak şekilde  $m$  ve  $M$  reel sayıları varsa,  $f(x)$  fonksiyonu sınırlıdır, yani hem üstten hem de alttan sınırlıdır.



**Örnek 1:**  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$  fonksiyonunun aşağıdan sınırlı olup olmadığını belirleyiniz!

**Çözüm:** Her  $x$  reel sayısı için,  $x^2 \geq 0$ 'dır.

$$x^2 \geq 0 \quad / \cdot \frac{1}{2} \text{ den,}$$

$$\frac{1}{2}x^2 \geq 0 \quad / +1$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 1 \geq 0 + 1$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 1 \geq 1 \text{ yani } f(x) \geq 1$$

Buradan, fonksiyonun  $y = 1$  ile aşağıdan sınırlı olduğu sonucu elde edilir.

Alıştırma 4: Aşağıdaki fonksiyonların sınırlı olduğunu ispatlayınız:

a)  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$       b)  $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

Verilen fonksiyonların üstten sınırlı olduğunu ispatlayınız:

c)  $f(x) = 1 - x^2$       ç)  $f(x) = 1 - 2^x$

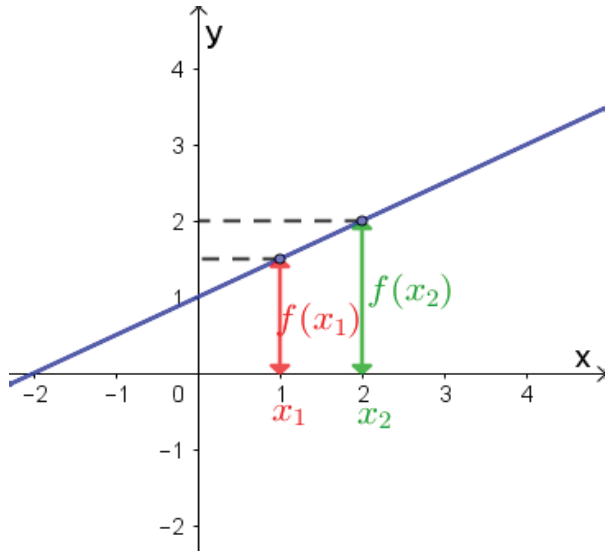
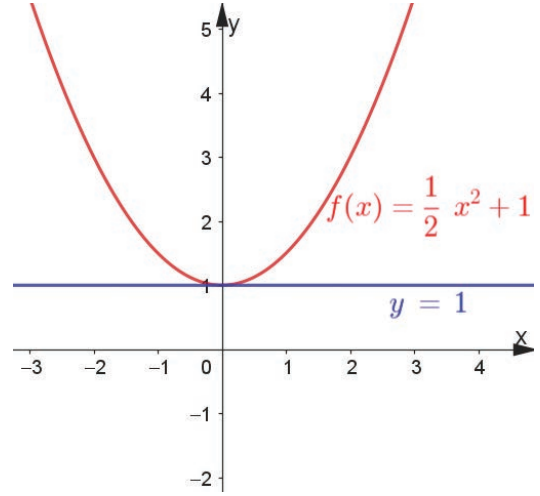
Verilen fonksiyonların alttan sınırlı olduğunu ispatlayınız:

d)  $f(x) = x^2 - 4$       dh)  $f(x) = 3^{x+2}$

### 1.5. FONKSİYONUN MONOTONLUĞU

Çizimde  $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$  fonksiyonunun grafiği gösterilmiştir. Fonksiyonun tanım kümesi  $D_f = R$ 'dir.

$x_1$  ve  $x_2$  tanım kümesinden  $x_1 < x_2$  olan iki farklı değer için, değişkenin daha büyük bir değerine fonksiyonun daha büyük bir değerinin karşılık geldiğini fark edebiliriz,  $f(x_1) < f(x_2)$ . Fonksiyonun tanım kümesinde, yani  $(-\infty, +\infty)$  aralığında arttığını söyleriz.



$f: R \rightarrow R$  fonksiyonu verilmiş olsun.

**Tanım:** Tanım kümesi  $D_f$  ve tanım kümesine ait  $(a,b)$  aralığı olan  $f(x)$  fonksiyonu için:

- Her  $x_1, x_2 \in (a,b)$  için,  $x_1 < x_2$  olduğunda  $f(x_1) < f(x_2)$  ise  $(a,b)$  aralığında (kesin) **monoton artandır**.
- Her  $x_1, x_2 \in (a,b)$  için,  $x_1 < x_2$  olduğunda  $f(x_1) > f(x_2)$  ise  $(a,b)$  aralığında (kesin) **monoton azalandır**.

Monoton artan veya monoton azalan fonksiyonlara monoton fonksiyonlar denir.

Kesin eşitsizlik geçerli değilse, fonksiyonun artan veya azalan olduğunu söyleriz.

**Örnek 1:**  $f(x) = 1 - x^3$  fonksiyonunun tüm tanım kümesindeki monotonluğunu belirtiniz.

**Çözüm:** Fonksiyonun tanım kümesi  $D_f = R$ 'dir.

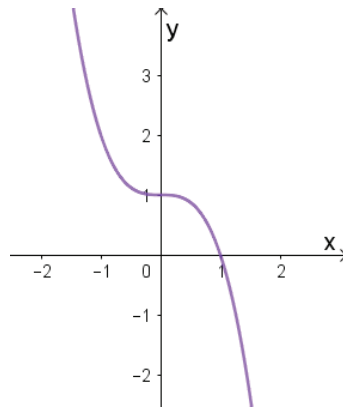
$x_1, x_2 \in D_f$  olsun, öyle ki  $x_1 < x_2$ . O zaman  $x_1^3 < x_2^3$  olur.

$$x_1^3 < x_2^3 \quad / \cdot (-1)$$

$$-x_1^3 > -x_2^3 \quad / \text{denklemin iki tarafına 1 katarız}$$

$$1 - x_1^3 > 1 - x_2^3 \text{ yani } f(x_1) > f(x_2)$$

Buradan  $f(x)$ 'in tüm tanım kümesinde kesin anlamda monoton azalan olduğu elde edilir.



**Alıştırma 5:** Aşağıdaki fonksiyonların monotonluğunu inceleyiniz:

a)  $f(x) = 2x - 5$

b)  $f(x) = 2 - 4x$

c)  $f(x) = \ln x$

ç)  $f(x) = 1 - x^3$

d)  $f(x) = 2x^3 + 1$

e)  $f(x) = 1 - \ln x$

**Alıştırma Soruları:**

1. Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini belirtiniz:

a)  $f(x) = x^5 - 4x^3 + 1$     b)  $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 9}$     c)  $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 9}$

2. Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini belirtiniz:

a)  $y = \sqrt{2 - 3x}$     b)  $y = \sqrt[3]{2 - 3x}$

3. Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini belirtiniz:

a)  $g(x) = \log(x^2 - 4)$     b)  $f(x) = \ln(x - 1) + \sqrt{5 - x}$

4. Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini belirtiniz:

a)  $f(x) = \frac{3x + 7}{x^2 - 5x}$     b)  $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - 4x + 3}$     c)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$   
 ç)  $f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x + 4}}$     d)  $f(x) = \log(x + 3) + \log(x - 3)$     e)  $f(x) = \log(16 - x^2)$

5.  $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$  fonksiyonu verilmiştir.  $f(-1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(0)$ ,  $f(a)$  değerlerini belirtiniz.

6.  $f(2) = -5$  ve  $f(-1) = 1$  ise  $f(x) = ax + b$  fonksiyonunu belirtiniz.

7.  $f(1) = 4$  ve  $f(-2) = -5$  ise  $f(x) = ax^2 + bx + 3$  fonksiyonunu belirtiniz.

8. Aşağıdaki fonksiyonların sıfırlarını bulunuz:

a)  $f(x) = -x^2 + 3x - 2$     b)  $f(x) = 3x - 2$

9. Aşağıdaki fonksiyonların sıfırlarını bulunuz:

a)  $f(x) = \frac{x^5 - 5x^3 + 4x}{x - 2}$     b)  $f(x) = \frac{x^3 - 27}{x^3 + 27}$

10. Aşağıdaki fonksiyonların sıfırlarını bulunuz:

a)  $f(x) = 3^{x^2 - 3} - 3$     b)  $f(x) = \log(x^2 + 2x) - 3$

11. Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini ve sıfırlarını belirtiniz:

a)  $f(x) = 8 - 2x - x^2$     b)  $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x - 4}$     c)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

ç)  $f(x) = 5^x - 25$

d)  $f(x) = \log(x+2) - 3$

12. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisinin çift, tek veya ne çift ne de tek olduğunu belirtiniz.

a)  $f(x) = 2x^7 - x^5 + 3x^3$

b)  $f(x) = \frac{3x^2}{4-x^2}$

c)  $f(x) = x^3 + 2 + \sin x$

13. Fonksiyonun çiftliğini inceleyin:

a)  $f(x) = 2x^7 - x^5 + 3x^3$

b)  $f(x) = \frac{3x^2}{4-x^2}$

c)  $f(x) = x^3 + 2 + \sin x$

14. Tanım kümelerinde aşağıdaki fonksiyonların monotonluğunu inceleyin:

a)  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$

b)  $f(x) = \frac{2x^2 - 5}{x^2 + 1}$

c)  $f(x) = x^2 - \sin x$

ç)  $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

d)  $f(x) = (x-1)^2$

e)  $f(x) = \frac{x \sin x}{1 + \cos x}$

15. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangilerinin sınırlı ve hangilerinin sınırsız olduğunu belirleyin:

a)  $f(x) = 4x + 7$

b)  $f(x) = x^3$

c)  $f(x) = 1 - x^3$

ç)  $f(x) = \log(x-3)$

d)  $f(x) = \frac{1}{x}$

16.

a)  $f(x) = \frac{3}{1+x^2}$

b)  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

c)  $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

ç)  $f(x) = 5 \cos x$

d)  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{1+x^2}$

e)  $f(x) = \ln \left( 1 + \frac{1}{1+x^2} \right)$

17. Aşağıdaki bileşke fonksiyonları (fonksiyonların kompozisyonu)  $f \circ g$  ve  $g \circ f$ 'yi belirtiniz:

a)  $f(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$  ve  $g(x) = 2 - 3x, x \in \mathbb{R}$

b)  $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$  ve  $g(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$

- c)  $f(x) = 2x + 1, x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$  ve  $g(x) = \frac{1}{x+5}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$   
 ç)  $f(x) = \lg x, x \in [1, +\infty)$  ve  $g(x) = \sqrt{x}, x \in (0, +\infty)$ .

**Not:**

Fonksiyonların bileşkesini (kompozisyonunu) önceki yıllarda öğrendiniz. Tanımı hatırlayalım.

**Tanım:**  $f$  fonksiyonu  $D_f$  kümesinde ve  $g$  fonksiyonu  $D_g$  kümesinde tanımlı olsun, öyle ki  $V_f = \{f(x) \mid x \in D_f\} \subseteq D_g$  olsun. O zaman  $D_f$  kümesinde,  $g$  ve  $f$  fonksiyonlarının  $g \circ f$  ile gösterilen bileşkesi (kompozisyonu),  $(g \circ f)(x) = g(f(x)), x \in D_f$  eşleme kuralı ile tanımlanır.

18.  $h = g \circ f$  ise,  $f$  fonksiyonu belirtiniz:

- a)  $h(x) = (3x - 7)^5, x \in \mathbb{R}$  ve  $g(x) = x^5, x \in \mathbb{R}$   
 b)  $h(x) = \sqrt{4 - x^2}, x \in [-2, 2]$  ve  $g(x) = \sqrt{x}, x \in [0, +\infty)$   
 c)  $h(x) = \sin^3 x, x \in \mathbb{R}$  ve  $g(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$

## 2. DOĞRUSAL FONKSİYON

Hatırlayalım!

Temel elementer fonksiyonlar şunlardır:

- Sabit fonksiyon  $y = c$  ( $c = \text{sabit}$ )
- Kuvvet fonksiyonu  $y = x^r$ ,  $r \in \mathbb{R}$
- Üstel fonksiyon  $y = a^x$ ,  $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- Logaritmik fonksiyon  $y = \log_a x$ ,  $a \neq 0$
- Trigonometrik fonksiyonlar:  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \text{tg}x$ ,  $y = \text{ctg}x$

**Tanım:** Temel elementer fonksiyonlardan sonlu sayıda aritmetik işlem (toplama, çıkarma, çarpma ve bölme) ve bileşke işlemi uygulanarak elde edilebilen her fonksiyona **elementer fonksiyon** denir.

Aşağıda, bazı elementer fonksiyonların grafiklerine ve özelliklerine odaklanacağız.

### Doğrusal (Lineer) Fonksiyon

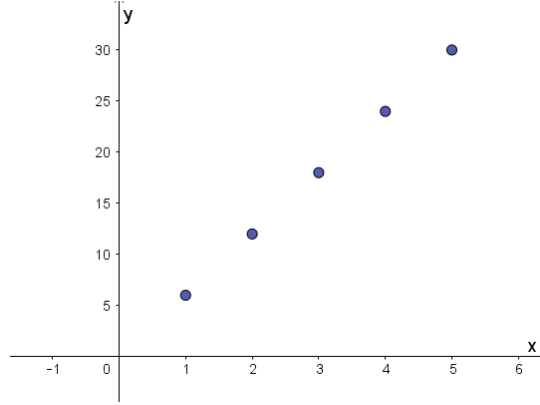
**Örnek 1:** Petre her gün bisikletiyle okula 6 km gidip geliyor. Petre'nin bir haftada kaç kilometre yol kat edeceğini hesaplayın. Değişkenin (argümanın) gün olduğu bir fonksiyon kullanarak günlere göre kat edilen kilometre toplamının nasıl değiştiğini belirtiniz.

**Çözüm:** Sonuçlar bir tabloda gösterilebilir:

|                       |   |    |    |    |    |                |
|-----------------------|---|----|----|----|----|----------------|
| Gün                   | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | <b>1 hafta</b> |
| Geçilen yol <i>km</i> | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | <b>30</b>      |

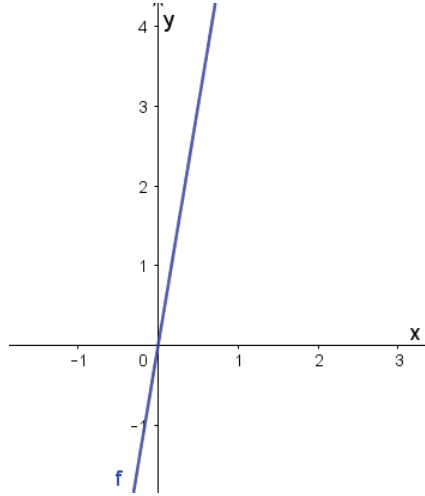
Kural cebirsel olarak  $f(x) = 6x$  formülü ile yazılabilir, burada tanım kümesi  $D_f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 'tir.

Fonksiyonu bir koordinat sistemindeki noktalarla grafik olarak temsil edebiliriz.



**Not:**  $x$  ve  $y$  eksenlerindeki birimler eşit değildir, grafiği daha iyi temsil etmek için 1:5 ölçeği ( $x$  eksen :  $y$  eksen) kullanılır.

$f(x) = 6x$  fonksiyonunun tanım kümesini  $D_f = R$  olarak yazarsak, fonksiyon grafiksel olarak bir doğru ile temsil edilir.



**Not:**  $x$  ve  $y$ - eksenlerindeki birimler eşittir, 1:1 ölçeği kullanınız.

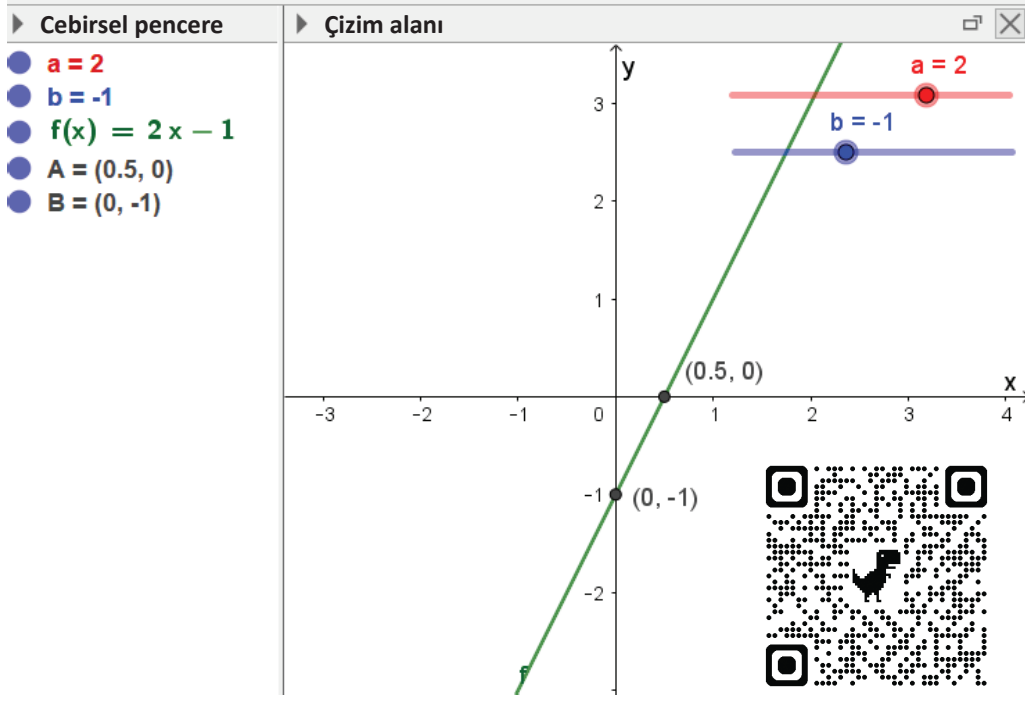
$f(x) = ax + b$  fonksiyonuna doğrusal fonksiyon denir.

Doğrusal fonksiyonun grafiği bir doğrudur. Fonksiyonun grafiğini çizmek için doğru üzerinde bulunan en az iki nokta belirlememiz gerekir.

Tanım kümesi reel sayılar kümesidir, yani  $D_f = R$  'dir."

Değerler kümesi reel sayılar kümesidir, yani  $V_f = R$  'dir."

Geogebra’da verilen applette,  $a$  ve  $b$  kaydırıcılarından değerler alan  $a$  ve  $b$  katsayılarına sahip doğrusal bir fonksiyon örneği verilmiştir. Doğrusal fonksiyon için hangi özellikler geçerli olacaktır?



<https://www.geogebra.org/m/d3uummybd>

$y = 0$  için  $x = -\frac{b}{a}$ ,  $a \neq 0$  elde ederiz. Fonksiyonun sıfırı  $x = -\frac{b}{a}$ , yani  $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$  noktasında fonksiyon  $x$ - eksenini keser.

$x = 0$  için  $y = b$  elde ederiz. Fonksiyon  $(0, b)$  noktasında  $y$ - eksenini keser.

Doğrunun eğimi, doğrunun  $x$  eksenine yaptığı açının tanjantına eşittir, yani  $a = \tan \alpha$  - doğrunun eğimi.

$a > 0$  ise fonksiyon monoton artandır,  $a < 0$  ise fonksiyon monoton azalandır.

Doğrusal fonksiyonun ekstremum noktası yoktur.

Bazı özel doğrusal fonksiyonlar:

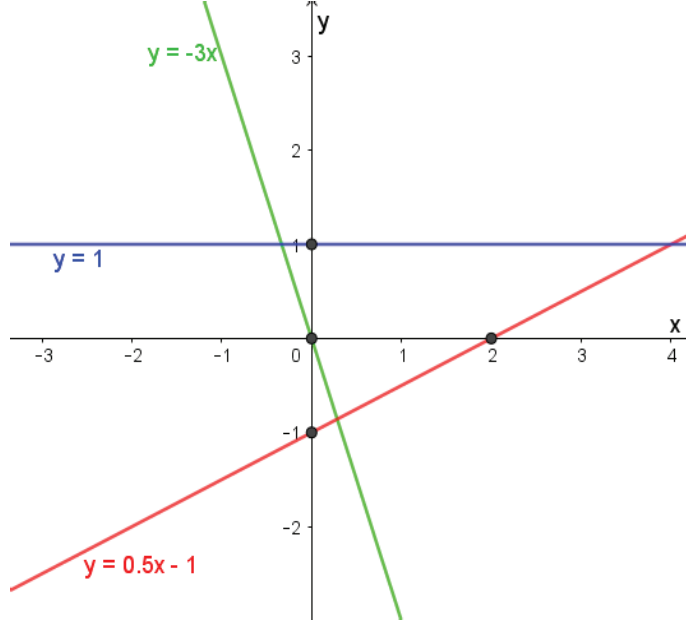
- $y = ax$  – koordinat başlangıcından geçer.
- $y = b$ ,  $x$ - eksenine paraleldir (sabit fonksiyon).

$x = a$  yazarsak, grafik  $y$  eksenine paralel bir doğrudur.



**Not:**  $y = a_1x + b_1$  ve  $y = a_2x + b_2$  olmak üzere iki doğru,  $a_1 = a_2$  ise paraleldir ve  $a_1 \cdot a_2 = -1$  ise birbirine diktir.

**Örnek 2:**  $y = -3x$ ,  $y = \frac{1}{2}x - 1$  ve  $y = 1$  doğrusal fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Fonksiyonlar için karakteristik değerleri belirleyiniz ve hangi özelliklerin geçerli olduğunu yazınız.



**Çözüm:** Sadece bir fonksiyonu ele alalım.

$y = -3x$  fonksiyonu için şunu belirleyebiliriz:

Tanım kümesi  $D_f = \mathbb{R}$  ve değer kümesi  $V_f = \mathbb{R}$  'dir.

Fonksiyonun sıfırı 0'dır, yani  $(0, 0)$  noktası  $x$ -ekseniyle kesişim noktasıdır, ancak aynı zamanda  $y$ -ekseniyle de kesişim noktasıdır.

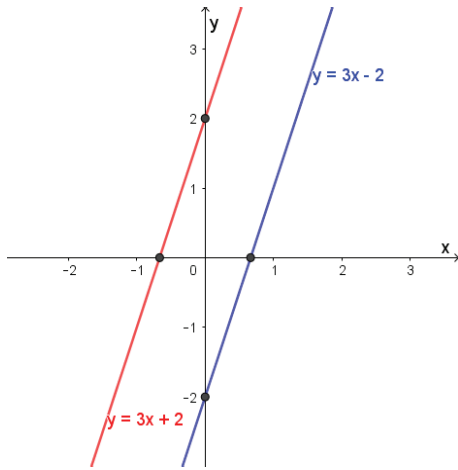
$a = -3 < 0$  olduğundan fonksiyon monoton azalandır.

**Örnek 3:** Aşağıdaki fonksiyonların grafikleri verilmiştir:

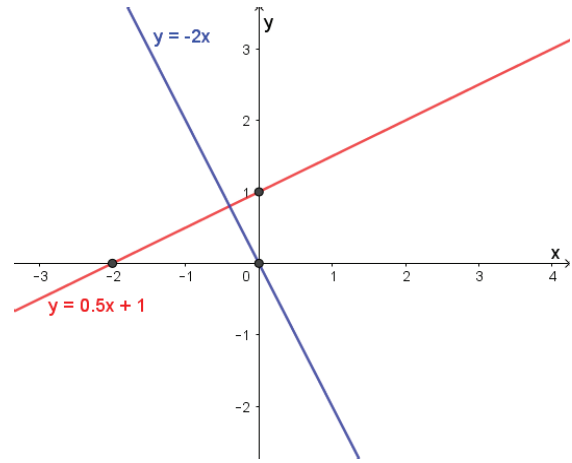
a)  $y = 3x + 2$  ve  $y = 3x - 2$  ve b)  $y = \frac{1}{2}x + 1$  ve  $y = -2x$ .

Hangi doğrular paraleldir ve hangileri birbirine diktir? Katsayıları için neyin geçerli olduğunu kontrol ediniz.

a)



b)



**Çözüm:**  $y = 3x + 2$  ve  $y = 3x - 2$  doğruları paraleldir ve doğruların eğimleri 3'e eşittir, yani  $a_1 = a_2 = 3$ .

$y = \frac{1}{2}x + 1$  ve  $y = -2x$  doğruları birbirine diktir ve eğimlerinin çarpımı  $a_1 \cdot a_2 = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$ 'dir.

### Alıştırma Soruları:

1. Doğruya ait en az iki nokta belirleyerek doğrusal fonksiyonların grafiklerini çizin:

a)  $f(x) = x + 1$ ,      b)  $f(x) = -x + 3$ ,      c)  $y = \frac{1}{3}x + 2$ ,      ç)  $y = -1$ .

2.  $A(3,2)$  noktasından geçen ve:

- a)  $x$  eksenine paralel olan,
- b)  $y$  eksenine paralel olan,
- c)  $f(x) = x + 3$  doğrusuna paralel olan,
- ç)  $g(x) = 2x - 1$  doğrusuna dik olan

Doğrunun denklemini yazınız.

Fonksiyonların grafiklerini çiziniz. Görsel temsil için Geogebra'yı da kullanabilirsiniz.

3. Verilenlere göre,  $f(x) = ax + b$  fonksiyonunda  $a$  ve  $b$  katsayılarını belirtiniz:

- a) Doğru  $A(1,2)$  ve  $B(2,5)$  noktalarından geçer,
- b) koordinat başlangıcından ve  $C(4, 2)$  noktasından geçer.

Aşağıdaki doğruların denklemleri nelerdir, eğer doğru:

- a) birinci ve üçüncü dördülün açıortayları ise,
- b) ikinci ve dördüncü dördülün açıortayları ise.

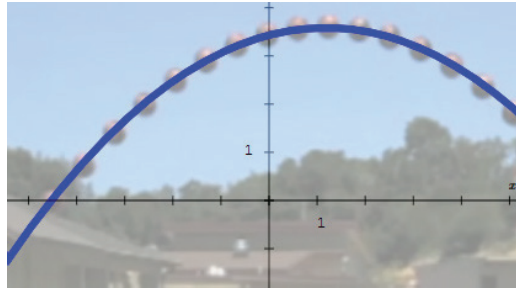
Fonksiyonların grafiklerini çiziniz. Görsel temsil için Geogebra'yı da kullanabilirsiniz.

### 3. İKİNCİ DERECE FONKSİYON

**Örnek 1:** Basketbolcu Ivo'nun evinin önünde basketbol oynadığı bir pota var. Animasyonda topun nasıl hareket ettiği bir iz bırakıyor. Bu noktaları bir eğri ile birleştirecek, eğri neyi temsil edecektir?



Noktaları birleştirerek ve Geogebra'daki appleti kullanarak, topun yolunun bir karesel fonksiyonun grafiğini temsil ettiğini görebiliriz.



$f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$  fonksiyonuna ikinci derece fonksiyon denir.

İkinci derece fonksiyonun grafiği bir **paraboldür**. Fonksiyonun grafiğini çizmek için birkaç karakteristik nokta belirlememiz gerekir.

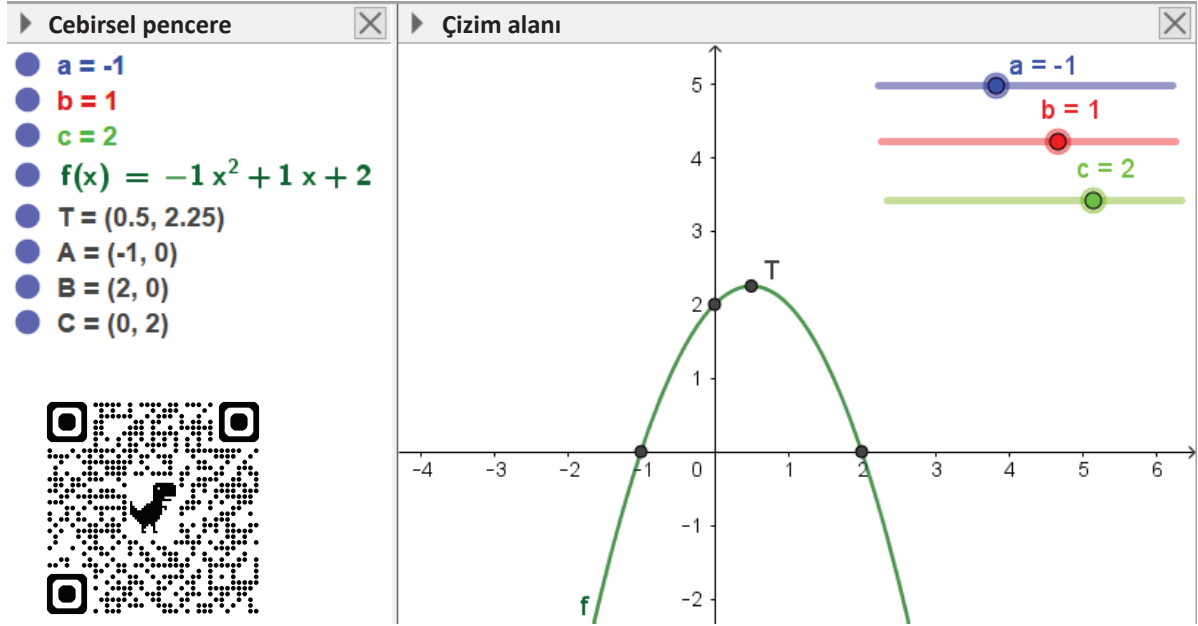
Tanım kümesi reel sayılar kümesidir, yani  $D_f = \mathbb{R}$ 'dir.

Parabolün tepesi  $T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ , yani  $T\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$  noktasındadır.

Değerler kümesi  $a > 0$  için,  $V_f = \left[f\left(-\frac{b}{2a}\right), +\infty\right)$ ,  $a < 0$  için ise  $V_f = \left(-\infty, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]$  dir.

$x = -\frac{b}{2a}$  simetri eksenidir.

Geogebra'daki applette, a, b ve c kaydırıcılarından değerler alan a, b ve c katsayılarına sahip bir ikinci derece fonksiyon örneği verilmiştir. İkinci derece fonksiyon için hangi özellikler geçerli olacaktır?



<https://www.geogebra.org/m/pgcjjnhj>

Fonksiyonun sıfırları  $y = 0$  için elde edilir ve  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$  denklemini çözerek şunu elde ederiz:

i) Eğer  $D = b^2 - 4ac > 0$  ise, fonksiyonun iki sıfırı vardır  $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ,  $x_1 \neq x_2$ , yani x-ekseniyle kesişim noktaları  $(x_1, 0)$  ve  $(x_2, 0)$ 'dir.

ii) Eğer  $D = b^2 - 4ac = 0$  ise, fonksiyonun bir sıfırı vardır  $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ , yani x-ekseniyle kesişim noktası (teğet noktası)  $(x_1, 0)$ 'dir.

iii) Eğer  $D = b^2 - 4ac < 0$  ise, fonksiyonun sıfırı yoktur,  $x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$  olduğundan denkleminin çözümü yoktur ve fonksiyon x-eksenini kesmez.

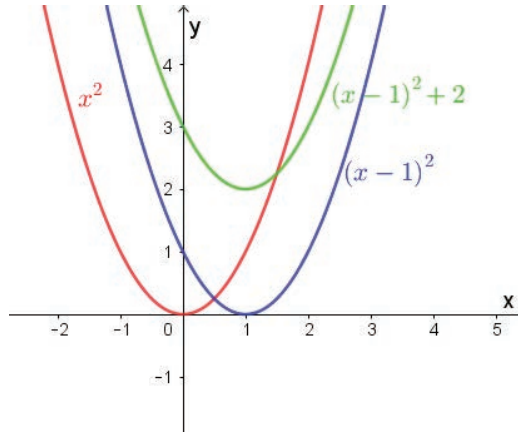
$x = 0$  için  $y = c$  elde ederiz. Fonksiyon  $(0, c)$  noktasında y-eksenini keser.

Fonksiyonun Monotonluğu:

- $a > 0$  ise, fonksiyon  $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$  aralığında azalandır ve  $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$  aralığında artandır.
- $a < 0$  ise, fonksiyon  $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$  aralığında artandır ve  $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$  aralığında azalandır.

$a > 0$  için, fonksiyon  $T$  tepe noktasında minimuma ulaşır ve  $a < 0$  için, fonksiyon  $T$  tepe noktasında maksimuma ulaşır.

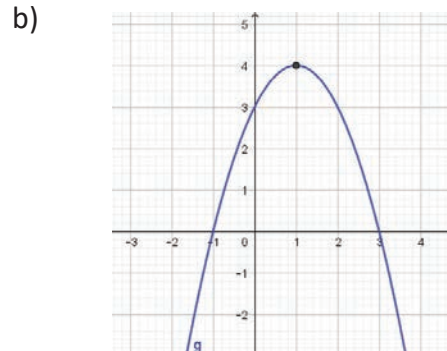
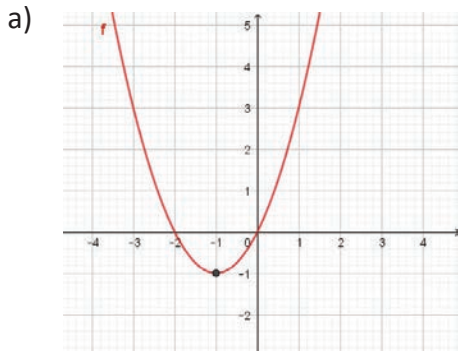
**Örnek 2:**  $y = x^2$ ,  $y = (x-1)^2$ ,  $y = (x-1)^2 + 2$  ikinci derece fonksiyonların grafikleri çizimde verilmiştir.



**Not:**

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$  biçiminde yazılan ikinci derece fonksiyon kanonik biçimde verilmiştir demir, burada  $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  ve  $(\alpha, \beta)$  noktası  $T$  tepe noktasının koordinatlarıdır.

**Örnek 3:**  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ikinci derece fonksiyonunun tepe noktasının koordinatlarını belirtiniz.  $a$  parametresinin işaretini, monotonluk aralıklarını ve koordinat eksenleriyle kesişim noktalarını belirtiniz.

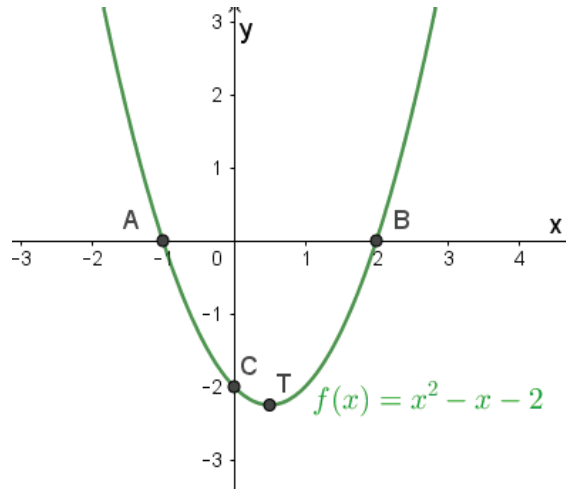


**Çözüm:**

a) Tepe noktasının koordinatları  $(-1, -1)$  dir. Parametre  $a > 0$ 'dır.  $(-\infty, 1)$  aralığında fonksiyon azalır ve  $(1, +\infty)$  aralığında artar.  $x$ - eksenine kesişim noktaları  $(2, 0)$  ve  $(0, 0)$  koordinatlı noktalardır ve  $y$ - eksenine kesişimi  $(0, 0)$  noktasıdır.

b) Tepe noktasının koordinatları  $(1, 4)$  tür. Parametre  $a < 0$ 'dır.  $(-\infty, 1)$  aralığında fonksiyon artar ve  $(1, +\infty)$  aralığında azalır.  $x$ - eksenine kesişim noktaları  $(-1, 0)$  ve  $(3, 0)$  koordinatlı noktalardır ve  $y$ - eksenine kesişimi  $(0, 3)$  noktasıdır.

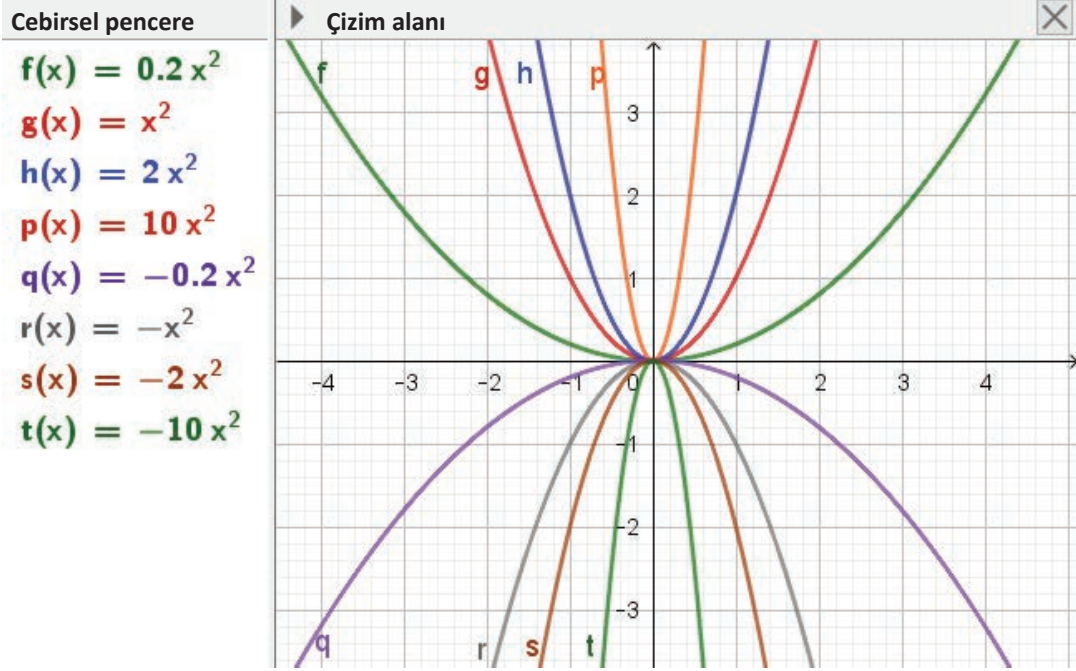
Örnek 4:  $f(x) = x^2 - x - 2$  fonksiyonunun grafiğini çizelim.

**Çözüm:****Not:**

İkinci derece fonksiyonun bazı özelliklerini belirlemek için,  $b$  ve  $c$  katsayılarının sıfır olduğu, yani  $b = 0$  ve  $c = 0$  olduğu bir ikinci derece fonksiyon örneğini ele alacağız. Özellikler herhangi katsayılarla sahip ikinci derece fonksiyonlar için de geçerli olacaktır.

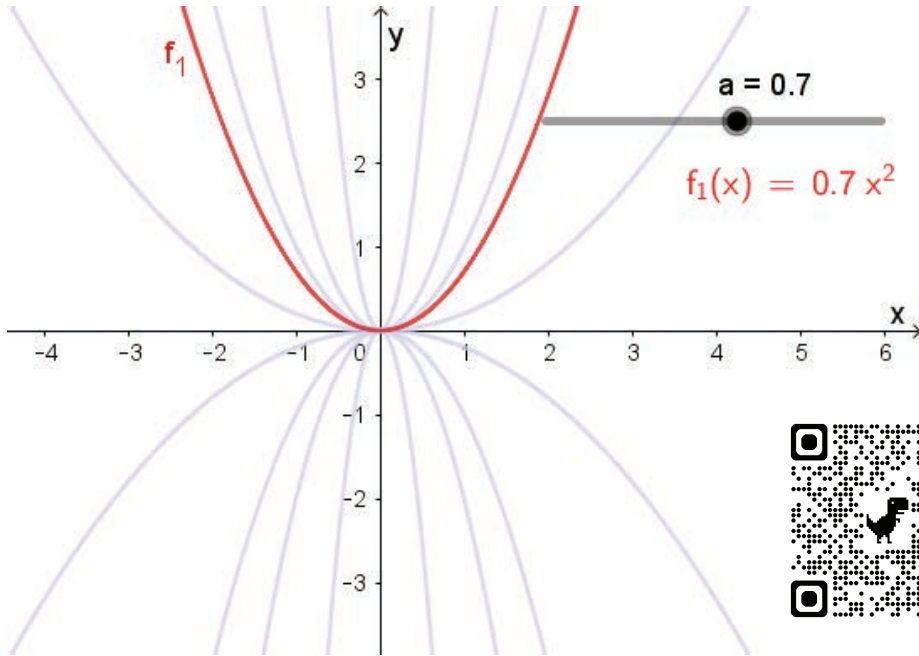
$f(x) = ax^2$  ikinci derece fonksiyonu için, parabolün eğimi ikinci baş katsayının mutlak değerine bağlıdır.

- Baş katsayının ( $a$ ) mutlak değeri ne kadar büyükse, parabolün eğimi o kadar hızlı artar (yani fonksiyonun teğet noktasındaki teğetlerinin eğimi). Parabolün “kolları”  $y$  eksenine daha yakındır.
- Baş katsayının mutlak değeri ne kadar küçükse, parabolün eğimi o kadar yavaş artar (yani fonksiyonun teğet noktasındaki teğetinin eğimi). Parabolün “kolları”  $x$  eksenine daha yakındır.



**Örnek 4:** Verilen parabolleri, eğimin en yavaş değişenlerden, eğimi en hızlı değişene göre sıralayınız.

$$y = -3x^2, y = 2x^2, y = -\frac{1}{2}x^2, y = \frac{1}{5}x^2.$$



<https://www.geogebra.org/m/zn3xmeuh>

**Alıştırma Soruları:**

1. Fonksiyonun tepe noktasının koordinatlarını, koordinat eksenleriyle kesişim noktalarını ve fonksiyona ait herhangi bir noktayı belirleyerek fonksiyonun grafiğini çiziniz.

a)  $y = x^2 + 2x$       b)  $y = x^2 - 6x + 5$       c)  $y = x^2 - 4$

**Not:** İkinci derece fonksiyonun grafiğini doğru çizmek için 5 nokta belirlememiz gerekir; bunlardan biri tepe noktasıdır ve diğer iki çifti parabolün simetri eksenine göre simetrik noktalarıdır.

2.  $f(x) = -x^2 + 2x + 3$  fonksiyonu verilmiştir.

a) Fonksiyonun tanım kümesini bulun.

b) Fonksiyonun sıfırlarını bulun.

c) Fonksiyonun maksimumunu hesaplayın ve parabolün tepe noktasının koordinatlarını belirleyin.

ç) Fonksiyonun değerler kümesini belirleyin.

d) Fonksiyonun monotonluk aralıklarını bulun.

e) Fonksiyonun grafiğini çizin. Fonksiyonun ve tüm noktalarının görsel temsili için Geogebra'yı da kullanabilirsiniz.

3.  $f(0) = 1$  ve  $f(1) = 2$  ise  $f(x) = ax^2 + c$  ikinci derece fonksiyonunu belirtiniz.

4. Grafiği  $A(1,-1)$ ,  $B(0,1)$  ve  $C(-1,5)$  noktalarından geçen  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ikinci derece fonksiyonunu belirtiniz.

Elde edilen fonksiyonun grafiğini çizin. Fonksiyonun ve üzerindeki noktaların görsel temsili için Geogebra'yı da kullanabilirsiniz.



## 4. KUVVET FONKSİYONU

## 4.1. DOĞAL ÜSLÜ KUVVET FONKSİYONU

$f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  fonksiyonuna doğal üslü kuvvet fonksiyonu denir.

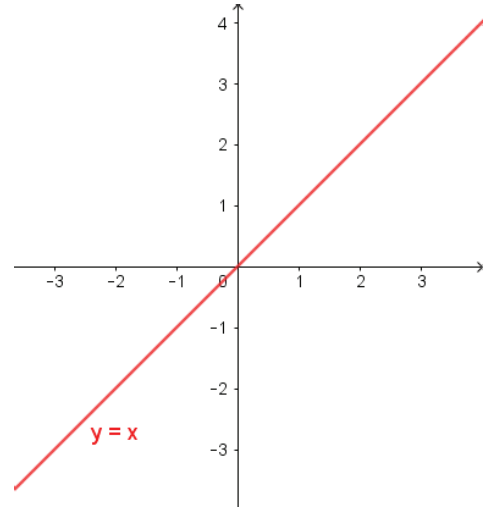
Birkaç özel durumu inceleyeceğiz.

1)  $n = 1$  için,  $f(x) = x$  fonksiyonu elde edilir. Bu,  $a = 1$  ve  $b = 0$  olan  $f(x) = ax + b$  doğrusal fonksiyonudur.

Grafik,  $(0,0)$  koordinat başlangıcından geçen bir doğrudur.

$$D_f = \mathbb{R} \text{ dhe } V_f = \mathbb{R} \text{ 'dir.}$$

Fonksiyon tüm tanım kümesinde monoton artandır.



2)  $n = 2$  için,  $f(x) = x^2$  fonksiyonu elde edilir. Bu,  $a = 1, b = 0$  ve  $c = 0$  olan  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ikinci derece fonksiyonudur.

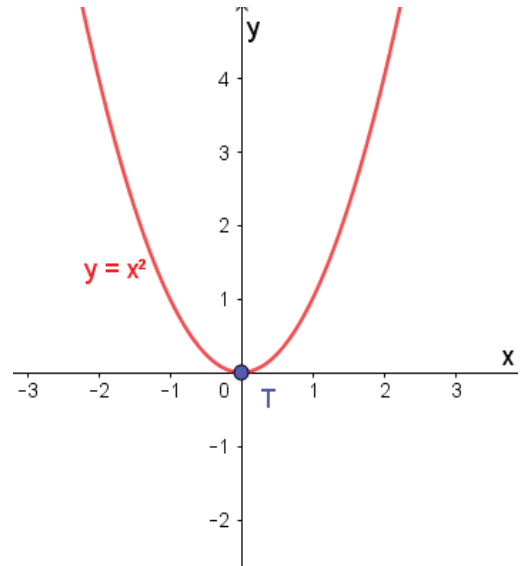
Fonksiyonun grafiği  $T(0,0)$  tepe noktasına sahip bir paraboldür.

$$D_f = \mathbb{R} \text{ ve } V_f = [0, +\infty) \text{ 'dır.}$$

Fonksiyon  $(-\infty, 0)$  aralığında monoton azalır ve  $(0, +\infty)$  aralığında monoton artandır.

Parabol yukarı doğru açılır ve  $T(0,0)$  tepe noktasında minimuma sahiptir, yani  $x = 0$  için  $y_{\min} = 0$  'dır.

$y$  eksenini simetri eksenidir.



3)  $n = 3$  için,  $f(x) = x^3$  fonksiyonunu elde ederiz. Bu fonksiyon aşağıdaki özelliklere sahiptir:

Fonksiyonun grafiği kübik parabol adı verilen bir eğridir.

$$D_f = R \text{ ve } V_f = R.$$

$n = 3, 5, 7, 9, \dots$  için, sadece farklı eğimlere sahip benzer eğriler elde edilir.

Fonksiyonlar tüm tanım kümesinde monoton artandır.

$x$  ve  $y$ - eksenleriyle kesişim noktası  $(0,0)$  noktasıdır.

Tüm fonksiyonların grafikleri  $(-1,1)$  ve  $(1,1)$  noktalarından geçer.

4)  $n = 4, 6, 8, \dots$  için,  $g(x) = x^4$ ,  $h(x) = x^6$ ,  $p(x) = x^8 \dots$  fonksiyonları elde edilir ve bunlar  $f(x) = x^2$  ikinci derece fonksiyonuyla aynı özelliklere sahiptir.

$$D_f = R \text{ ve } V_f = [0, +\infty)$$

Fonksiyonlar  $(-\infty, 0)$  aralığında monoton azalır ve  $(0, +\infty)$  aralığında monoton artandır.

Eğrilerin kolları yukarı doğru açılır ve  $(0,0)$  tepe noktasında minimuma sahiptir, yani  $x = 0$ ,  $y_{\min} = 0$ .

$y$ - eksen simetri eksenidir.

Tüm fonksiyonlar  $(-1,1)$  ve  $(1,1)$  noktalarından geçer.

$$f(x) = x^3$$

$$g(x) = x^5$$

$$h(x) = x^7$$

$$p(x) = x^9$$

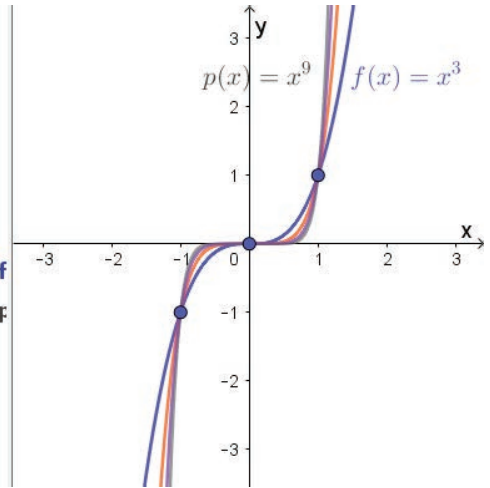
$$A = (0, 0)$$

$$B = (1, 1)$$

$$C = (-1, -1)$$

$$\text{ТЕКСТ1} = "f"$$

$$\text{ТЕКСТ2} = "f"$$



$$T = (0, 0)$$

$$f: y = x^2$$

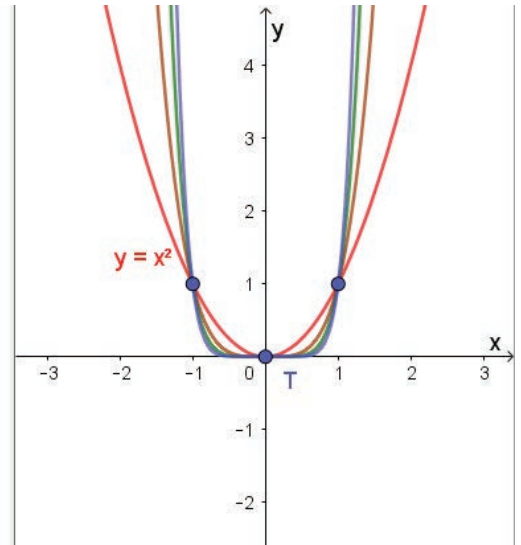
$$g: y = x^4$$

$$h: y = x^6$$

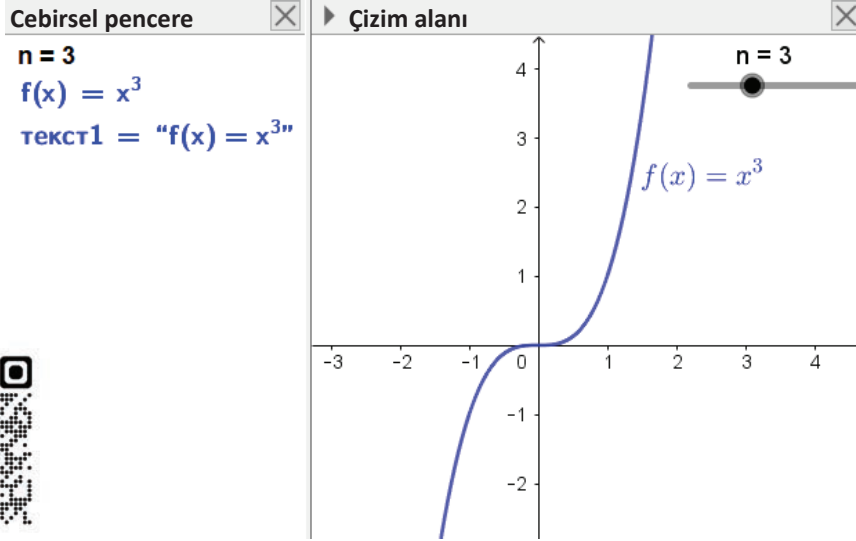
$$p: y = x^8$$

$$A = (1, 1)$$

$$B = (-1, 1)$$



Doğal sayı üssü olan kuvvet fonksiyonlarının özelliklerini incelemek için, apletten yararlanabilirsiniz. Kuvvetin değerini kaydırıcı ile değiştirebileceğiniz bir uygulama kullanabilirsiniz.



<https://www.geogebra.org/m/ekuwfbd8>

**Örnek 1:** Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini birkaç karakteristik nokta belirleyerek çizin:

a)  $f(x) = x^4$ , b)  $g(x) = x^5$ .

**Çözüm:** a)  $f(x) = x^4$  fonksiyonu için,  $x \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$  için fonksiyon değerlerini belirtiniz ve ardından grafiği çiziniz.

b)  $g(x) = x^5$  fonksiyonu için,  $x \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$  için fonksiyon değerlerini belirtiniz ve ardından grafiği çiziniz.

Fonksiyonların görsel temsili için yukarıdaki Geogebra uygulamasını kullanın.

#### 4.2. RASYONEL SAYI ÜSLÜ KUVVET FONKSİYONU

$N$  kuvvetinin mümkün değerler kümesini rasyonel sayılar kümesine genişletirsek ve kuvvet olarak  $q$  yazarsak,  $f(x) = x^q$  rasyonel üslü bir kuvvet fonksiyonu elde ederiz,  $Q \in q$ .

Rasyonel üslü birkaç özel kuvvet fonksiyonunu inceleyeceğiz:  $q \in \left\{-1, -2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$ .

1)  $q = -1$  için,  $f(x) = x^{-1}$  fonksiyonunu elde ederiz, yani  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Fonksiyon aşağıdaki özelliklere sahiptir:

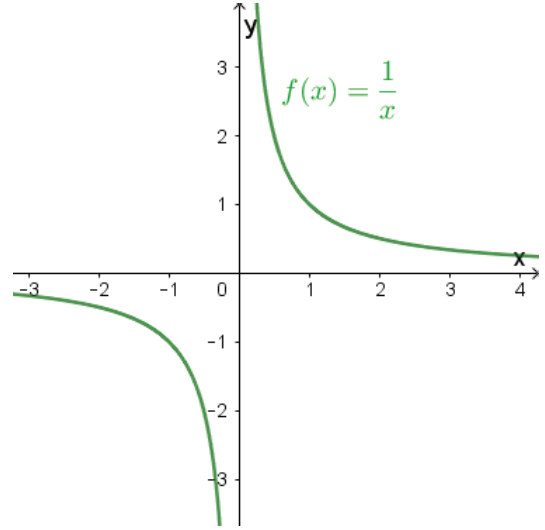
$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ ve } V_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Fonksiyon  $(-\infty, 0)$  ve  $(0, +\infty)$  aralıklarında monoton azalandır.

Ekstremum değeri yoktur.

$x$  ve  $y$  eksenlerini kesmez.

$(-1, -1)$  ve  $(1, 1)$  noktalarından geçer.



2)  $q = -2$  için,  $f(x) = x^{-2}$  fonksiyonunu elde ederiz, yani  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ . Fonksiyon aşağıdaki özelliklere sahiptir:

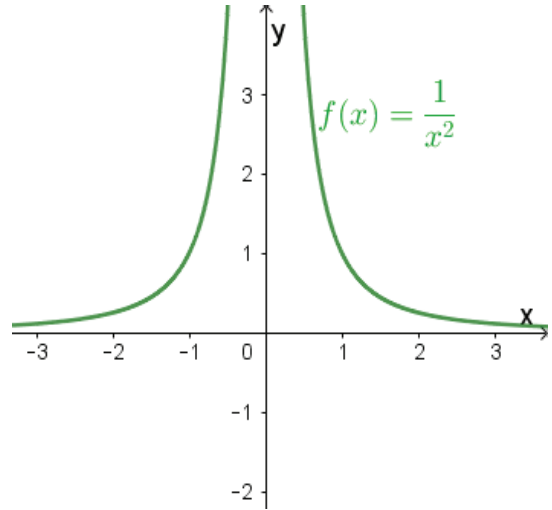
$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ ve } V_f = (0, +\infty).$$

Fonksiyon  $(-\infty, 0)$  aralığında monoton artandır ve  $(0, +\infty)$  aralığında monoton azalandır.

Ekstremum değeri yoktur.

$x$  ve  $y$  eksenlerini kesmez.

$(-1, 1)$  ve  $(1, 1)$  noktalarından geçer.



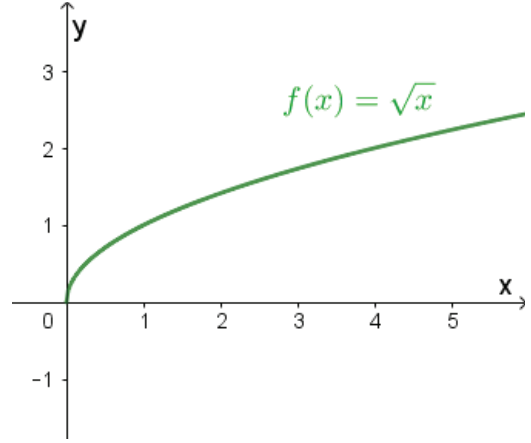
3)  $q = \frac{1}{2}$  için,  $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$  yani  $f(x) = \sqrt{x}$  fonksiyonunu elde ederiz. Fonksiyon aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$D_f = [0, +\infty)$  ve  $V_f = [0, +\infty)$ . Fonksiyon tüm tanım kümesinde monoton artandır.

(0,0) noktasında minimum değere sahiptir.

$x$  ve  $y$  eksenlerini (0,0) noktasında keser.

Fonksiyon (1,1) noktasından geçer.



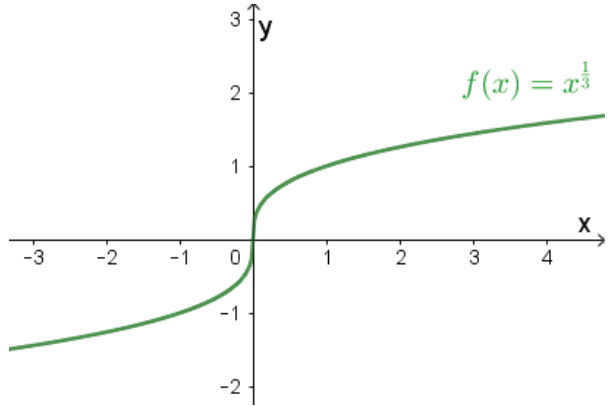
4)  $q = \frac{1}{3}$  için,  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$  yani  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  fonksiyonunu elde ederiz. Fonksiyon aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$D_f = R$  ve  $V_f = R$

Fonksiyon tüm tanım kümesinde monoton artandır.

$x$  ve  $y$ - eksenlerini (0,0) noktasında keser.

(-1,1) ve (1,1) noktalarından geçer.



Rasyonel üslü kuvvet fonksiyonlarının genel durumlarını inceleyelim. Üssün negatif bir tam sayı veya  $q = \frac{a}{b}$  rasyonel sayısı olduğu durumları ayrı ayrı inceleyeceğiz, burada  $a$  ve  $b$  aralarında asal sayılardır ve  $b \neq \{0,1\}$ 'dir.

1) Üssün negatif bir tam sayı olduğu durum:

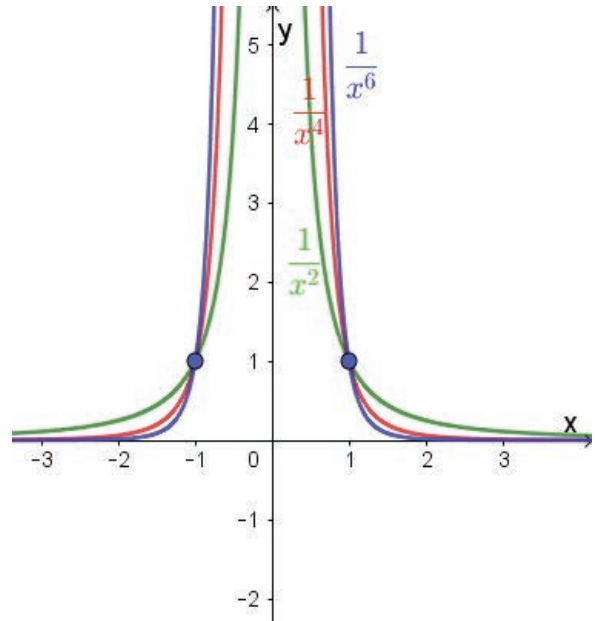
1 a) Eğer  $q = -2n, n \in \mathbb{N}$  için,  $f(x) = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}$  fonksiyonu elde edilir,.

Fonksiyon için geçerli olan özellikler şunlardır:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ ve } V_f = (0, +\infty)$$

Fonksiyon  $(-\infty, 0)$  aralığında monoton artandır ve  $(0, +\infty)$  aralığında monoton azalandır.

Fonksiyonun ekstremum değeri yoktur ve  $x$  ve  $y$ - eksenlerini kesmez. Fonksiyon  $(-1, 1)$  ve  $(1, 1)$  noktalarından geçer.



1 b) Eğer  $q = -(2n-1), n \in \mathbb{N}$  için,

$f(x) = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}}$  fonksiyonu elde edilir,

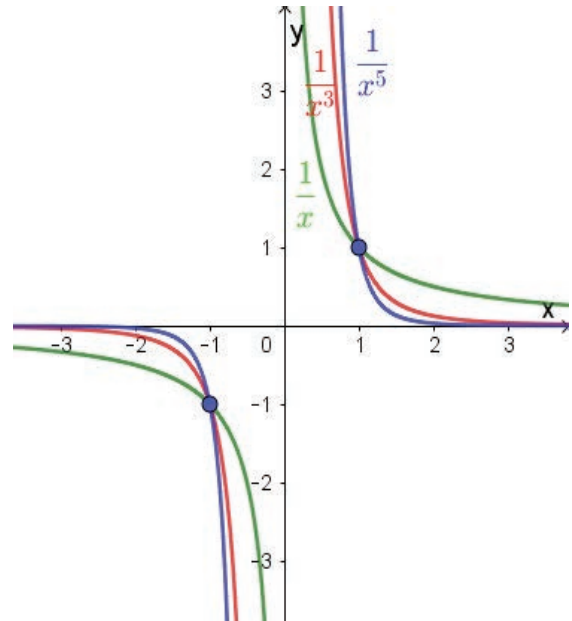
Fonksiyon için geçerli olan özellikler şunlardır:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ ve } V_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Fonksiyon  $(-\infty, 0)$  ve  $(0, +\infty)$  aralıklarında monoton azalandır.

Fonksiyonun ekstremum değeri yoktur ve  $x$  ve  $y$ - eksenlerini kesmez.

Fonksiyon  $(-1, -1)$  ve  $(1, 1)$  noktalarından geçer.



2)  $q = \frac{a}{b}$  rasyonel sayısı için üssün  $q$  rasyonel sayısı olduğu durum, burada  $a$  ve  $b$  aralarında asal sayılardır ve  $b \neq \{0,1\}$ 'dir.

**Not:** Örneklerde  $a$ 'nın değeri tek olan pozitif sayıdır.

2 a)  $b$  çift sayı ise,  $f(x) = x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}$  fonksiyonu elde edilir.

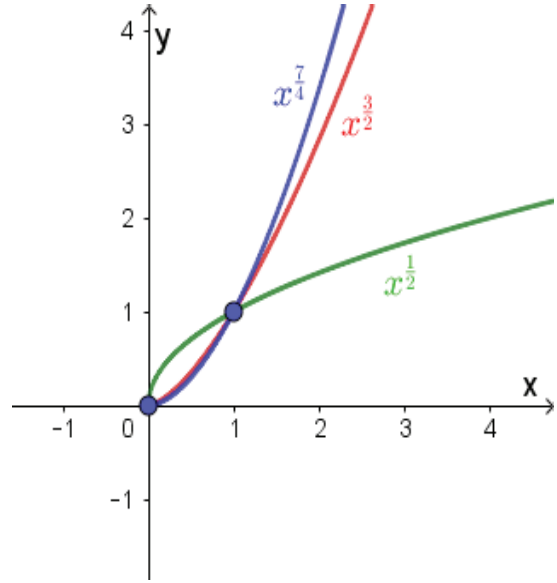
Fonksiyon için geçerli olan özellikler şunlardır:  
 $D_f = [0, +\infty)$  ve  $V_f = [0, +\infty)$

Fonksiyon tüm tanım kümesinde monoton artandır.

$(0,0)$  noktasında minimum değere sahiptir.

Fonksiyon  $x$  ve  $y$  eksenlerini  $(0,0)$  noktasında keser.

Fonksiyon  $(1,1)$  noktasından geçer.



2 b)  $b$  tek sayı ise,  $f(x) = x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}$  fonksiyonu elde edilir.

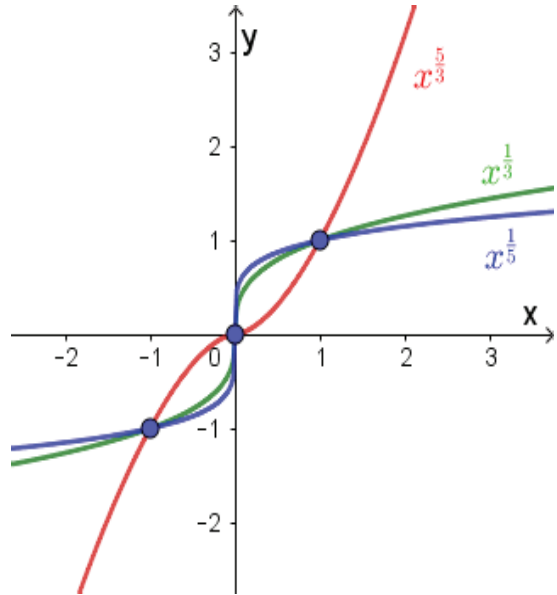
Fonksiyon için geçerli olan özellikler şunlardır:

$$D_f = R \text{ ve } V_f = R$$

Fonksiyon tüm tanım kümesinde monoton artandır.

Fonksiyon  $x$  ve  $y$  eksenlerini  $(0,0)$  noktasında keser.

Fonksiyon  $(-1,-1)$  ve  $(1,1)$  noktalarından geçer.



**Alıştırma Soruları:**

Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çizin ve özelliklerini belirtiniz:

1. a)  $y = x^6$                       b)  $y = x^{-4}$

2. a)  $y = \sqrt[3]{x}$                       b)  $y = \sqrt[4]{x}$

3.  $y = x^{\frac{1}{6}}$  fonksiyonu verilmiştir.

a) Fonksiyonun tanım kümesini belirtiniz.

b) Fonksiyonun sıfırları var mı?

c) Fonksiyonun değerler kümesini belirtiniz.

ç) Fonksiyon sınırlı mıdır?

d) Fonksiyonun grafiğini çizin.

4.  $y = x^{-3}$  fonksiyonu verilmiştir.

a) Fonksiyonun tanım kümesini belirtiniz.

b) Fonksiyonun sıfırları var mıdır?

c) Fonksiyonun değerler kümesini belirtiniz.

ç) Fonksiyon sınırlı mıdır?

d) Fonksiyonun grafiğini çizin. Fonksiyonun görsel temsili için Geogebra'yı da kullanabilirsiniz.



## 5. ÜSTEL FONKSİYON

$a \neq 1, a > 0$  için  $f(x) = a^x$  fonksiyonuna üstel fonksiyon denir. Fonksiyon aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$D_f = R \text{ ve } V_f = (0, +\infty).$$

$y$ - eksenini  $(0,1)$  noktasında keser.

Minimum ve maksimum değeri yoktur.

$a > 0$  için, fonksiyon tüm tanım kümesinde monoton artandır ve  $0 < a < 1$  için fonksiyon tüm tanım kümesinde monoton azalandır.

Fonksiyon alttan sınırlıdır, yani  $f(x) > 0$ 'dır.

Fonksiyonun sıfırı yoktur.

**Örnek 1:** Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz:

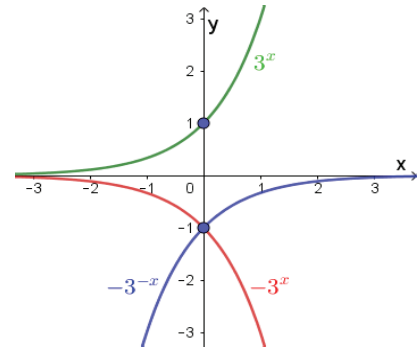
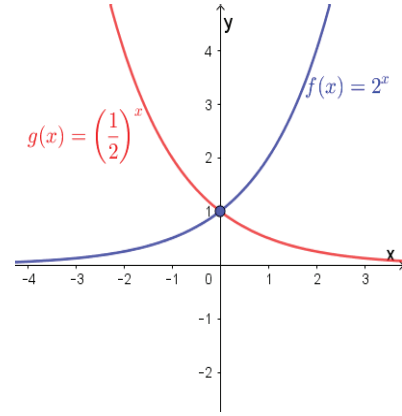
a)  $y = 3^x, y = -3^x, y = -3^{-x}$

b)  $y = 2^x, y = 2^x - 1, y = 2^{x+2} - 1$

**Çözüm:**

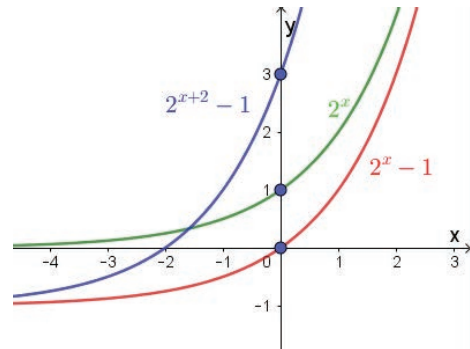
$y = 3^x, y = -3^x, y = -3^{-x}$  üstel fonksiyonlarının grafikleri çizimde verilmiştir.

Fonksiyonlar için hangi özellikler geçerlidir?



$y = 2^x, y = 2^x - 1, y = 2^{x+2} - 1$  üstel fonksiyonlarının grafikleri çizimde verilmiştir.

Fonksiyonlar için hangi özellikler geçerlidir?



**Alıştırma Soruları:**

Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz:

1. a)  $y = 4^x$       b)  $y = 3^x$

2. a)  $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$       b)  $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

3.  $y = a^x$  fonksiyonu verilmiştir.

a)  $a$  tabanı hangi değerleri alabilir?

b) Fonksiyonun tanım ve değerler kümesini belirtiniz.

c) Fonksiyon sınırlı mıdır?

ç) Fonksiyonun monotonluğunu  $a$ 'ya bağlı olarak belirleyiniz.

d) Fonksiyonun sıfırları var mıdır?

4.  $f(x) = a^x$  fonksiyonu  $A(1,2)$  noktasından geçiyorsa, fonksiyonu belirtiniz. Fonksiyonun grafiğini çiziniz. Fonksiyonun ve geçtiği noktanın görsel temsili için Geogebra'yı kullanabilirsiniz.

## 6. LOGARİTMİK FONKSİYON

$y = \log_a x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  fonksiyonuna logaritmik fonksiyon denir.

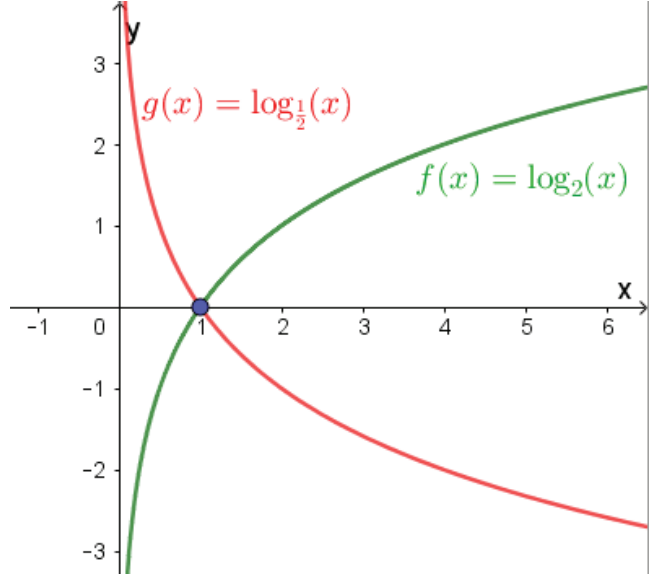
Fonksiyon aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$D_f = (0, +\infty) \text{ ve } V_f = \mathbb{R}$$

Fonksiyonun maksimum ve minimum değeri yoktur.

$x = 1$  fonksiyonun sıfırdır, yani  $x$  eksenine kesişim noktası  $(1,0)$  noktasıdır.

$a > 1$  için fonksiyon tüm tanım kümesinde monoton artandır,  $0 < a < 1$  için ise, fonksiyon tüm tanım kümesinde monoton azalandır.



**Örnek 1:** Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz:

a)  $y = \log_2 x$ ,  $x > 0$ ;    b)  $y = \log_2 \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ ;    c)  $y = \log_2(-x)$ ,  $x < 0$

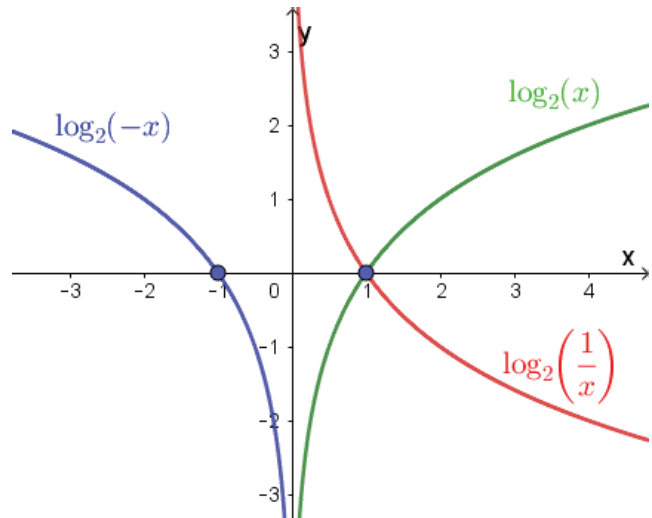
**Çözüm:**

$$y = \log_2 x, x > 0,$$

$$y = \log_2 \frac{1}{x}, x > 0, \text{ ve } y = \log_2(-x), x < 0$$

logaritmik fonksiyonların grafikleri çizimde verilmiştir.

Fonksiyonlar için hangi özellikler geçerlidir?



**Alıştırma Soruları:**

Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz:

1. a)  $y = \log_3 x$

b)  $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

2. a)  $y = -2 + \log_2 x$

b)  $y = \log_2 (x-1)$

3.  $y = \log_a x$  fonksiyonu verilmiştir.

a)  $a$  tabanı hangi değerleri alabilir?

b) Fonksiyonun tanım kümesini ve değerler kümesini bulunuz.

c) Fonksiyon sınırlı mıdır?

ç) Fonksiyonun monotonluğunu  $a$ 'ya bağlı olarak belirleyiniz.

d) Fonksiyonun sıfırları var mıdır?

4.  $A(4,2)$  noktasından geçen  $f(x) = \log_a x$  fonksiyonunu belirtiniz. Fonksiyonun grafiğini çizin. Fonksiyonun ve geçtiği noktanın görsel temsili için Geogebra'yı kullanabilirsiniz.

## 7. TERS FONKSİYON KAVRAMI

$y = 2^x$  ve  $y = \log_2 x$  fonksiyonlarının grafiklerini aynı koordinat sisteminde gösterelim.

Fonksiyonlar hakkında ne fark edilebilir?

$y = 2^x$  üstel fonksiyonu için tanım kümesi

$D_f = R$  ve  $V_f = (0, +\infty)$ .

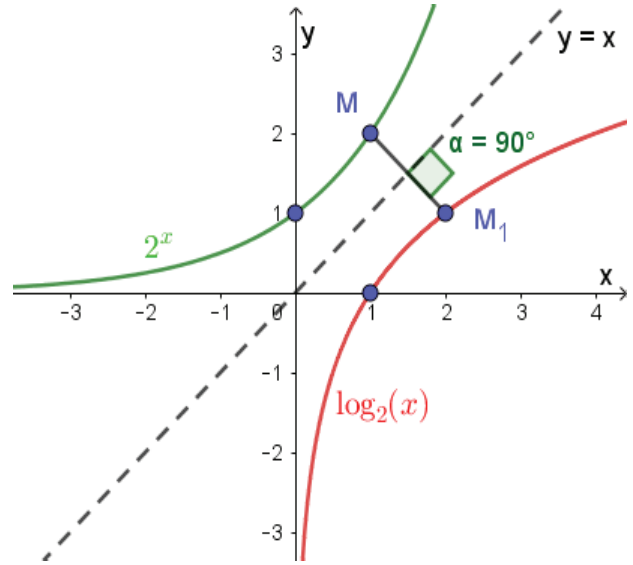
$y = \log_2 x$  logaritmik fonksiyonu için tanım

kümesi  $D_f = (0, +\infty)$  ve  $V_f = R$ .

İki fonksiyonun grafikleri aynı şekle sahiptir ve birinci ve üçüncü bölgenin açıortayı olan  $y = x$  doğrusuna göre simetrik.

Eğer  $M(a, b)$  noktası  $y = 2^x$  fonksiyonunun grafiğine aitse, o zaman  $M_1(a, b)$  noktası  $y = \log_2 x$  fonksiyonunun grafiğine aittir.

$y = 2^x$  ve  $y = \log_2 x$  fonksiyonları birbirinin tersidir.



Tanım kümesi  $D_f$  ve değerler kümesi  $V_f$  olan bir  $f$  fonksiyonu verildiğinde,  $D_g = V_f$  tanım kümesiyle ve  $V_g = D_f$  değer kümesine sahip ve ters işlem yapan bir  $g$  fonksiyonunun var olup olmadığı ve nasıl belirleneceği sorusu ortaya çıkar, yani her  $x \in D_f$  ve  $y \in V_f$  için  $g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$  sağlanmış olsun.

Yukarıdaki gereksinimleri karşılayan  $g$  fonksiyonuna  $f$  fonksiyonunun ters fonksiyonu denir.

**Tanım:**  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonu,  $Y$ 'deki her eleman  $X$ 'teki tam olarak bir elemanın görüntüsü olacak şekilde ise, yani  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$  gerekirse,  $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$  ile tanımlanan  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  fonksiyonuna  $f(x)$  fonksiyonunun ters fonksiyonu denir.

$f^{-1}(x)$  ters fonksiyonunun **tanım kümesi**,  $f(x)$  fonksiyonunun değerler kümesine eşittir, yani  $D_{f^{-1}} = V_f$ .

**Not:**  $f^{-1}$  işareti  $\frac{1}{f}$  anlamına gelmez.

**Örnek 1:**  $f(x) = \frac{x}{2x+1}$  fonksiyonunun ters fonksiyonunu belirtelim.

**Çözüm:**  $f(x)$  yerine  $y$  yazalım.  $y = \frac{x}{2x+1}$  elde ederiz.

$x$ 'i ifade etmek için önce  $2x+1$  ile çarpmakla,

$$y(2x+1) = x \text{ elde ederiz.}$$

$$2xy + y = x$$

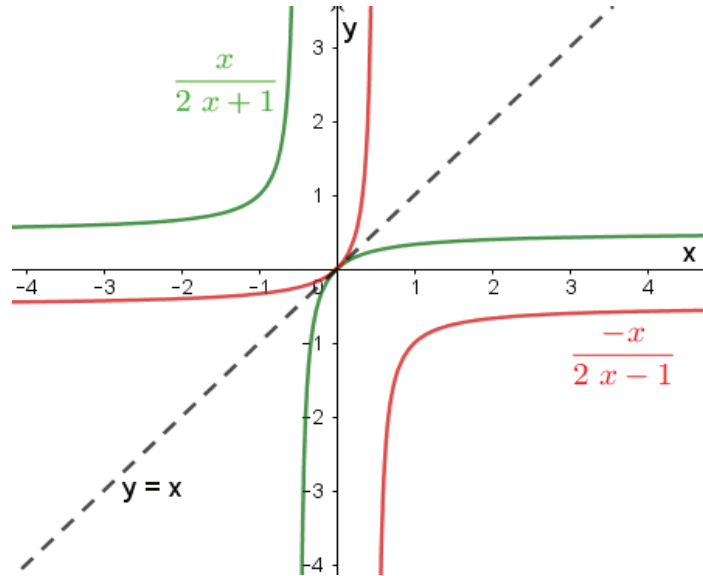
$$2xy - x = -y$$

$$x(2y-1) = -y$$

$$x = -\frac{y}{2y-1}$$

Yani ters fonksiyon  $f^{-1}(x) = -\frac{x}{2x-1}$  'dir.

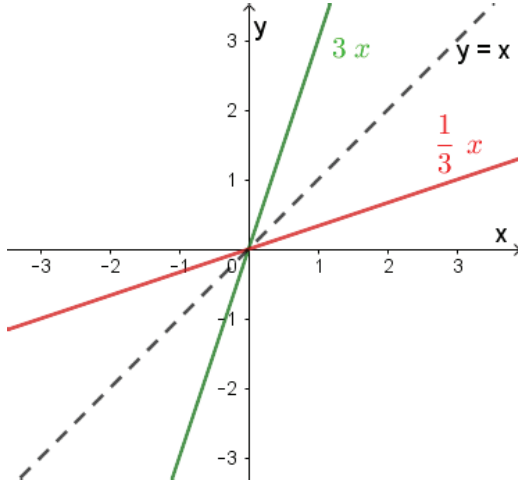
**Not:** Fonksiyon ve ona karşılık gelen ters fonksiyonunun grafikleri  $y = x$  doğrusuna göre simetriktr.



## Örnek 2. Ters fonksiyon örnekleri ve grafikleri

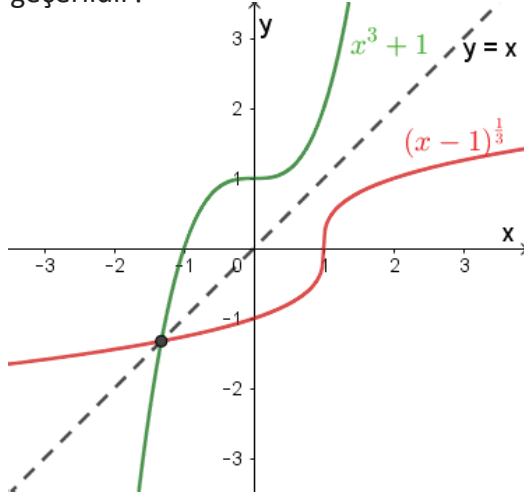
a)  $y = 3x$  ve  $y = \frac{1}{3}x$

Fonksiyonlar için hangi özellikler geçerlidir?



b)  $y = x^3 + 1$  ve  $y = \sqrt[3]{x-1}$

Fonksiyonlar için hangi özellikler geçerlidir?



## Alıştırma Soruları:

Aşağıdaki fonksiyonların ters fonksiyonlarını belirtiniz:

1. a)  $y = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}x$  b)  $y = \frac{2x+1}{x-2}$

2. a)  $y = \sqrt[3]{x} + 1$  b)  $y = 10^{x-2} + 3$

3. Verilen fonksiyonlar kendilerinin tersi olduğunu kanıtlayınız.

a)  $y = \frac{1}{x}$  b)  $y = \frac{1-x}{1+x}$

4.  $a$  ve  $b$ 'nin hangi değerleri için  $y = ax + b$ , ( $a \neq 0$ ) doğrusal fonksiyonu kendi kendinin tersidir? Geogebra'da kaydırıcılardan elde edilen parametre değerlerine sahip bir doğrusal fonksiyon oluşturun. Çözümü görsel olarak temsil edin.

5. Aşağıdaki fonksiyonların ters fonksiyonlarını belirtiniz:

a)  $f(x) = \frac{1}{x+1}$

b)  $f(x) = \sqrt{x+1}$

c)  $f(x) = 2^x - 1$

ç)  $f(x) = 1 + \ln(x+2)$

d)  $f(x) = \frac{2-x}{2+x}$

## 8. TEMEL TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

İlk olarak, fonksiyonlar için geçerli olan bir özelliği hatırlayalım.

**Tanım:**  $D_f$  kümesinde tanımlı  $f(x)$  fonksiyonu için,

1) Për her  $x \in D_f$  ve  $x \pm T \in D_f$ ,

2)  $f(x+T) = f(x)$

olacak şekilde  $T \neq 0$  reel sayısı varsa,  $f(x)$  fonksiyonuna **periyodiktir** denir.

$T$  sayısına fonksiyonun **periyodu** denir.

**Tanım:**  $D_f$  kümesinde tanımlı  $f(x)$  fonksiyonu periyodik olsun. Her  $x \in D_f$  için  $f(x+T) = f(x)$  olacak şekilde en küçük pozitif  $T$  sayısına  $f(x)$  fonksiyonunun **temel periyodu** denir.

$y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$  fonksiyonlarına trigonometrik fonksiyonlar denir. Grafiklerini çizelim ve temel özelliklerini yazalım.

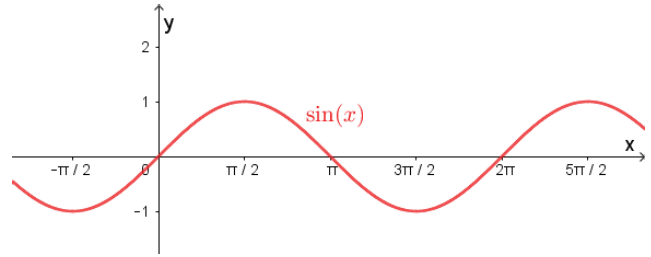
1)  $f(x) = \sin x$

$D_f = \mathbb{R}$  ve  $V_f = [-1, 1]$

Fonksiyon sınırlıdır.

Fonksiyonun temel periyodu

$T = 2\pi$ 'dir.



$x_k = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  sayıları fonksiyonun sıfırlarıdır, yani fonksiyonun grafiği  $x$ -eksenini  $(k\pi, 0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  noktalarında keser.

Fonksiyon,  $k \in \mathbb{Z}$  için  $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$  aralıklarında -1'den 1'e kadar monoton artandır ve  $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  aralıklarında 1'den -1'e kadar monoton azalandır.

Fonksiyonun grafiğine **sinüsoid** denir.



2)  $f(x) = \cos x$

$$D_f = R \text{ ve } V_f = [-1, 1]$$

Fonksiyon sınırlıdır.

Fonksiyonun temel periyodu

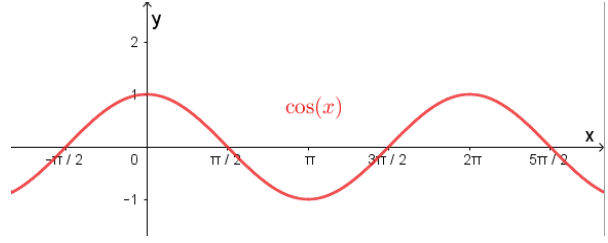
$$T = 2\pi \text{ dir.}$$

$x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in Z$  sayıları fonksiyonun sıfırlarıdır, yani fonksiyonun grafiği  $x$ -eksenini

$\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$ ,  $k \in Z$  noktalarında keser.

Fonksiyon,  $((2k-1)\pi, 2k\pi)$ ,  $k \in Z$  aralıklarında monoton artandır ve  $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ ,  $k \in Z$  aralıklarında monoton azalandır.

Fonksiyonun grafiğine **kosinüsoid** adı verilir.



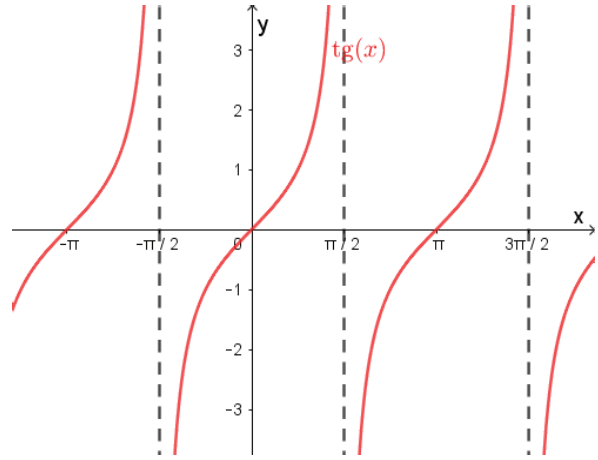
3)  $f(x) = \text{tg } x$

$$D_f = R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in Z \right\} \text{ ve}$$

$$V_f = R \text{ dir.}$$

Fonksiyon sınırsızdır.

Fonksiyonun temel periyodu  $T = \pi$  olmak üzere periyodiktir.



$x_k = k\pi$ ,  $k \in Z$  sayıları fonksiyonun sıfırlarıdır, yani fonksiyonun grafiği  $x$ -eksenini  $(k\pi, 0)$ ,  $k \in Z$  noktalarında keser.

Fonksiyon,  $k \in Z$  için  $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$  aralıklarında  $-\infty$ 'dan  $+\infty$ 'a kadar monoton artandır.

Fonksiyonun grafiğine **tanjant eğrisi** denir.

4)  $f(x) = \text{ctgx}$

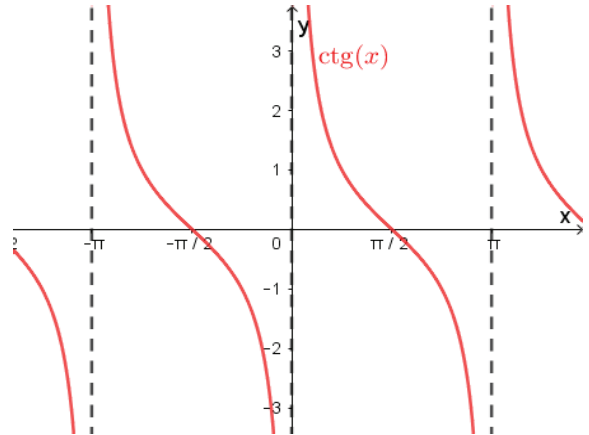
$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \text{ ve}$$

$$V_f = \mathbb{R}$$

Fonksiyon sınırsızdır.

Fonksiyonun temel periyodu

$$T = \pi \text{ dir.}$$



$x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  sayıları fonksiyonun sıfırlarıdır, yani fonksiyonun grafiği x- eksenini

$\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  noktalarında keser.

Fonksiyon,  $k \in \mathbb{Z}$  için  $(k\pi, (k+1)\pi)$  aralıklarında  $+\infty$ 'dan  $-\infty$ 'a kadar monoton azalır.

Fonksiyonun grafiğine **kotanjant eğrisi** denir.

### Alıştırma Soruları:

1. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çizin:

a)  $y = 2 \sin x$

b)  $y = \cos x + 2$

2. Aşağıdaki fonksiyonların periyodik olup olmadığını kontrol ediniz:

a)  $y = 1 + \sin x$

b)  $y = \cos x - 2$

c)  $y = -\text{tg}x - 3$

3. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri çift, hangileri tek ve hangileri ne çift ne de tektir:

a)  $y = 3x^2 + \cos x$

b)  $y = 2 \sin x - 3x$

c)  $y = \sin x + 2 \cos x$

4.

a) Hangi fonksiyona periyodik fonksiyon denir?

b) Hangi periyoda temel periyot denir?

**TEKRARLAMA VE PRATİK UYGULAMA ALIŞTIRMALARI:**

Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini belirtiniz:

a)  $f(x) = x^5 - 3x + 7$       b)  $f(x) = \frac{2x+5}{x^2+3x-4}$       c)  $y = 5\lg(4-x^2)$

Aşağıdaki fonksiyonların sıfırlarını bulun:

a)  $f(x) = \frac{x^4+1}{x^2+x+1}$       b)  $y = x^4 - 2x^2 + 1$       c)  $f(x) = \log(2x+1)$

$f(0) = -2$  ve  $f(1) = 0$  olduğuna göre,  $f(x) = ax + b$  biçimindeki fonksiyonu belirtiniz.

Aşağıdaki fonksiyonların çift ya da tek olup olmadıklarını inceleyiniz:

a)  $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$       b)  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^4+1}$       c)  $f(x) = x^2 - \cos x$

Aşağıdaki fonksiyonların ters fonksiyonlarını bulunuz:

a)  $y = \frac{2}{3} - \frac{3}{4}x$       b)  $y = \frac{x+5}{2x-1}$

c)  $y = \sqrt[3]{x} - 2$       ç)  $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

$f$  fonksiyonu  $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$  formülüyle veriliyor.

a)  $f(-2)$ ,  $f(0)$ ,  $f(3)$ 'ü bulunuz.

b)  $x$  ve  $y$  eksenleriyle kesişim noktalarını bulunuz.

c) Fonksiyonun grafiğini çizin ve a) ve b) şıklarındaki noktaları gösteriniz.

ç) Fonksiyon nerede artar? Nerede azalır?

d)  $x < -1$  olduğunda fonksiyonun değerleri nelerdir?

f) Fonksiyon hangi  $x$  değeri için 1 değerini alır?

g) Fonksiyon hangi  $x$  değerleri için -1'den küçük değerler alır?

7.  $f$  fonksiyonu  $f(x) = -2x + 1$  formülüyle veriliyor.

a)  $f(-2)$ ,  $f(0)$ ,  $f(3)$  değerlerini bulun.

b)  $x$  ve  $y$ - eksenleriyle kesişim noktalarını bulun.

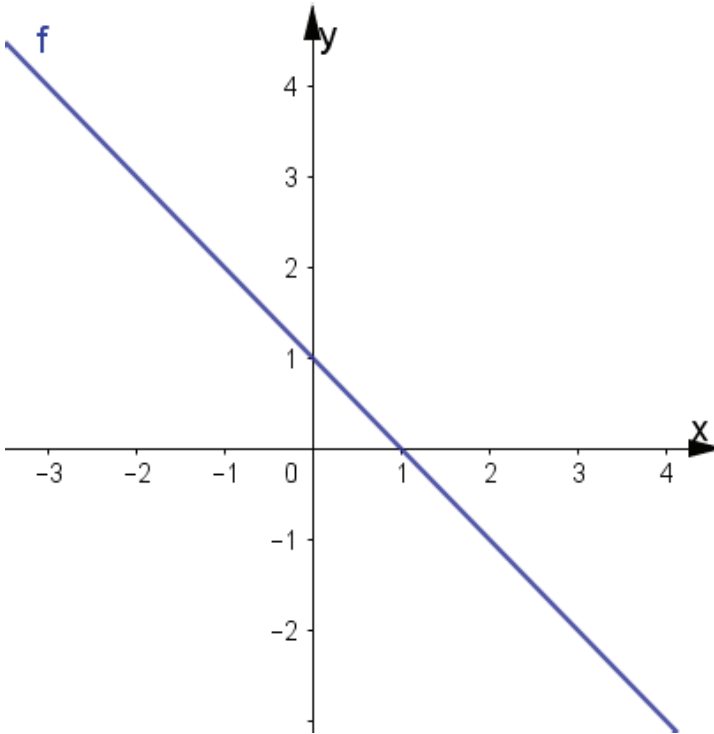
c) Fonksiyonun grafiğini çizin ve a) ve b) şıklarındaki noktaları gösterin.

ç) Fonksiyon nerede artar? Nerede azalır?

d)  $x > 3$  olduğunda fonksiyonun değerleri nelerdir?

e) Fonksiyon hangi  $x$  değeri için  $-5$ 'ten küçük değerlere ulaşır?

8. Fonksiyonun grafiği ile veriliyor:



a) Fonksiyonun herhangi bir noktada maksimum değeri var mı? Minimum değeri var mı?

b) Fonksiyon nerede artar? Nerede azalır?

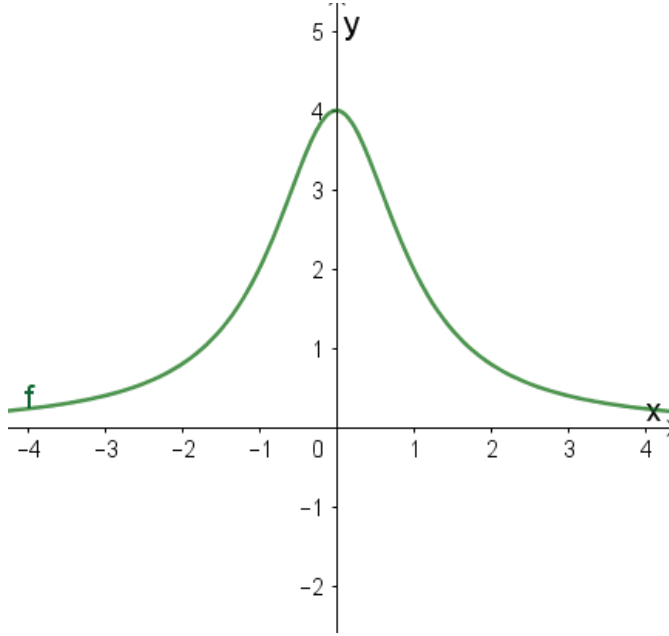
c)  $x = 2$  ve  $x = -1$  için fonksiyonun değerleri nelerdir?

ç)  $x < -2$  olduğunda fonksiyonun değerleri nelerdir?

d) Fonksiyon hangi  $x$  değeri için  $-1$  değerini alır?

e) Fonksiyon hangi  $x$  değerleri için 1 ile 5 arasında değerler alır?

9. Fonksiyonun grafiği veriliyor:



a) Fonksiyonun herhangi bir noktada maksimum değeri var mı? Minimum değeri var mı?

b) Fonksiyon nerede artar? Nerede azalır?

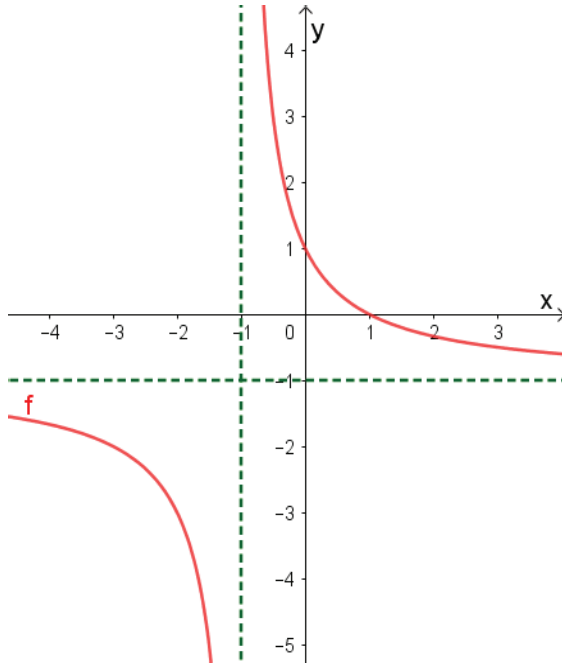
c)  $x = 2$  ve  $x = 0$  için fonksiyonun değerleri nelerdir?

ç)  $x < -1$  olduğunda fonksiyonun değerleri nelerdir?

d) Fonksiyon hangi  $x$  değeri için -1 değerini alır?

e) Fonksiyon hangi  $x$  değerleri için 0 ile 2 arasında değerler alır?

10. Fonksiyonun grafiği veriliyor:



a) Fonksiyonun herhangi bir noktada maksimum değeri var mı? Minimum değeri var mı?

b) Fonksiyon nerede artar? Nerede azalır?

c)  $x = 1$  ve  $x = 0$  için fonksiyonun değerleri nelerdir?

ç)  $x < -1$  olduğunda fonksiyonun değerleri nelerdir?

d) Fonksiyon hangi  $x$  değeri için 1 değerini alır?

e) Fonksiyon hangi  $x$  değerleri için -1'den küçük değerler alır?

## MODÜLER ÜNİTE 3

### FONKSİYONUN LİMİT DEĞERİ

Bu modüler ünite de şunları öğreneceksiniz:

Fonksiyonun limit değeri

Bir noktada fonksiyonun sürekliliği

Fonksiyonun grafiğinin asimptotları

Temel fonksiyonların limitleri

Temel reel fonksiyonların grafiklerinin asimptotları

Özel limit değerleri

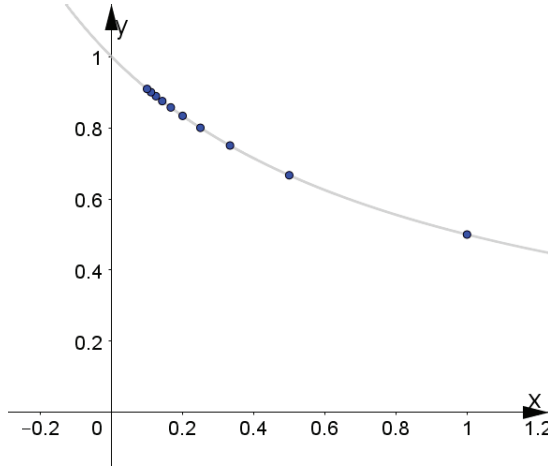
**FONKSİYONUN LİMİT DEĞERİ****1. FONKSİYONUN LİMİT DEĞERİ KAVRAMI****Fonksiyonun Limiti**

$f(x) = \frac{1}{x+1}$ ,  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  fonksiyonu verilmiş olsun.

$x$  değişkeninin değerleriyle,  $x_n = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  genel terimiyle verilen dizi aracılığıyla 0' a yaklaşalım.  $(x_n)$  dizisinin değerleriyle ve  $y_n = f(x_n) = f\left(\frac{1}{n}\right)$  fonksiyonunun değerleriyle  $n \in \mathbb{N}$  için bir tabloda oluşturalım.

|          |     |               |               |               |               |               |               |               |               |                |     |
|----------|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|-----|
| $x_n$    | 1   | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{10}$ | ... |
| $f(x_n)$ | 0,5 | 0,667         | 0,75          | 0,8           | 0,833         | 0,857         | 0,875         | 0,889         | 0,9           | 0,909          | ... |

Bu tablodan,  $(x_n)$  dizisinin 0'a yakınsadığı ve fonksiyonun  $(f(x_n))$  değerleri dizisinin 1'e yakınsadığı görülmektedir (çizime bkn.).



$|f(x_n) - 1|$  farkının mutlak değerinin değerini belirlersek, şunu elde ederiz:

|                |     |       |      |     |       |       |       |       |     |       |     |
|----------------|-----|-------|------|-----|-------|-------|-------|-------|-----|-------|-----|
| $f(x_n)$       | 0,5 | 0,667 | 0,75 | 0,8 | 0,833 | 0,857 | 0,875 | 0,889 | 0,9 | 0,909 | ... |
| $ f(x_n) - 1 $ | 0,5 | 0,333 | 0,25 | 0,2 | 0,167 | 0,143 | 0,125 | 0,111 | 0,1 | 0,091 | ... |

Şunu fark edebiliriz,  $(x_n)$  dizisinin değerleri 0'a yaklaşıırken  $|f(x_n) - 1|$  farkının değerleri 0'a yaklaşıyor.

0'a yakınsayan, yani  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  olan başka bir dizi  $(x_n)$  alırsak, fonksiyonun değerleri 1'e yakınsayacağını göreceğiz, yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n + 1} = 1.$$

1 değerine  $x = 0$  noktasında fonksiyonun limit değeri olduğunu söyleyeceğiz ve  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$  biçiminde yazacağız. ( $x$ , 0'a yaklaşıırken  $f(x)$  fonksiyonunun limiti 1'dir diye okunur).

**Tanım 1:**  $f(x)$  fonksiyonu  $x_0$ 'ı içeren bir  $(a, b)$  aralığında tanımlı olsun ( $x_0$ 'da tanımlı olabilir veya olmayabilir). Eğer  $x_0$ 'a yakınsayan her  $(x_n)$  reel sayı dizisi ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n \in (a, b)$ ) için  $(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0)$  fonksiyonun  $(f(x_n))$  değerleri dizisi  $A$  reel sayısına yakınsayan yakınsak bir dizi ise  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$  o zaman  $x$ ,  $x_0$ 'a yaklaşıırken  $f(x)$  fonksiyonunun limitinin  $A$  sayısı olduğunu söyleriz. Fonksiyon  $x_0$  noktasında tanımlı olmayabilir.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  olarak yazarız.

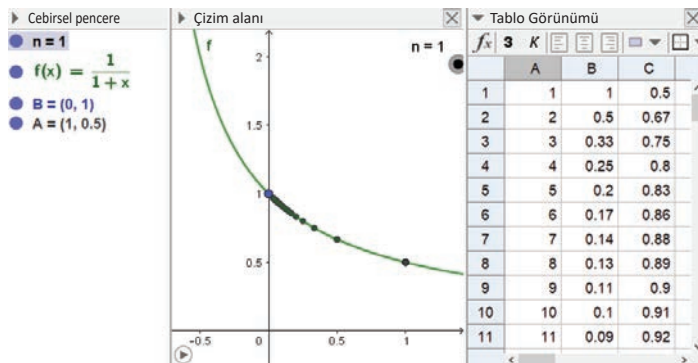
$A$  reel sayısına  $x_0$  noktasında  $f(x)$  fonksiyonunun **limit değeri** ya da **sınırı** denir.

Fonksiyonun limit değeri kavramı aşağıdaki tanım ile de verilebilir.

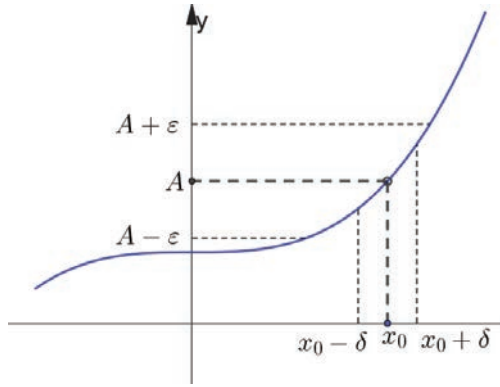
**Tanım 2:**  $x$  değişkeni  $x_0$ 'a yaklaşıırken  $(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A)$   $f(x)$  fonksiyonunun limiti  $A$  değerine sahip olduğunu söyleriz, eğer her  $\varepsilon > 0$  için  $\delta > 0$  varsa, öyle ki her  $x \in D_f$  için,  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  koşulunu sağlayadığında  $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$  doğrudur, yani  $|x - x_0| < \delta$  ise  $|f(x) - A| < \varepsilon$  gerekir.

Fonksiyonun limit değeri için her iki tanım da geçerlidir. Bu iddianın kanıtını vermeyeceğiz. Tanım 1 ve tanım 2'nin geometrik yorumu şekillerde ve appletlerde gösterilmiştir.

**Tanım 1:**





**Tanım 2:**

$y = f(x)$  fonksiyonu  $D_f \subseteq \mathbb{R}$  kümesinde tanımlı olsun ve  $x_0 \in \mathbb{R}$  noktası,  $y = f(x)$  fonksiyonunun kendisi hariç bir komşuluğunda tanımlı olduğu bir nokta olsun.

Bir noktada veya komşuluğunda fonksiyonun limit değerini bulma sorunu, esasen  $f(x)$  noktasının komşuluğundaki fonksiyonun değerinin davranışını belirlemektir.

**Örnek 1:**  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$  fonksiyonu verilsin. Fonksiyonun tanım kümesi  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ 'dir. Değişken  $x_0 = 2 \in D_f$  noktasına yaklaşırken fonksiyonun davranışını inceleyelim, yani fonksiyonun limit değerini belirleyelim.

**Çözüm:** Her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $x_n \neq -1$  olacak şekilde,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$  olan herhangi bir reel sayı dizisi  $(x_n)$  alalım.  $f(x_n) = \frac{x_n-1}{x_n+1}$  olacak şekilde fonksiyonun  $(f(x_n))$  değerleri dizisini oluşturalım. Dizinin limit değeri işlemlerini kullanarak şunu elde ederiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - 1}{x_n + 1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + 1} = \frac{2 - 1}{2 + 1} = \frac{1}{3}.$$

Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $x_n \neq -1$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$  olan herhangi bir reel sayı dizisi  $(x_n)$  için, fonksiyonun  $(f(x_n))$  değerlerinin dizisi limit değeri  $\frac{1}{3}$  olan yakınsak dizidir, yani  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \frac{1}{3}$  'tür.

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{3}$  biçiminde yazar ve  $x$  değişkeni 2'ye yaklaşırken  $f(x)$  fonksiyonunun limit değerinin  $\frac{1}{3}$  olduğunu okuruz.

**Örnek 2:**  $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$  fonksiyonu verilsin. Fonksiyonun tanım kümesi  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  'dir. Değişken  $x_0 = 1 \notin D_f$  noktasına yaklaşırken fonksiyonun davranışını inceleyelim, yani fonksiyonun limit değerini belirleyelim.

**Çözüm:** Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $x_n \neq \pm 1$  olacak şekilde,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$  olan keyfi bir reel sayı dizisi  $(x_n)$  alalım.  $f(x_n) = \frac{x_n-1}{x_n^2-1}$  olacak şekilde fonksiyonun  $(f(x_n))$  değerleri dizisini oluşturalım. Dizinin limit değeri işlemlerini kullanarak şunu elde ederiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n-1}{x_n^2-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n-1}{(x_n-1)(x_n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n+1} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2} \text{ olarak yazarız.}$$

**Not:** Örnekte, fonksiyon  $x_0 = 1$  noktasında tanımlı olmamasına rağmen, fonksiyonun  $x_0 = 1$  komşuluğunda limit değeri vardır ve  $\frac{1}{2}$  dir.

### Değişken sonsuza varırken fonksiyonun limiti

**Tanım 3:** Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $x_n \in D_f$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  olacak şekilde her yakınsak  $(x_n)$  dizisi için,  $f(x)$  fonksiyonunun  $(f(x_n))$  değerlerinin dizisi yakınsak olarak limiti  $A$  ise, yani  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$  ise,  $f(x)$ 'in  $x$  sonsuza varırken  $A$  limitine sahip olduğunu söyleriz ve  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$  biçiminde yazarız.

**Örnek 3:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x-1}$  limit değerini hesaplayalım.

**Çözüm:** Fonksiyonun tanım kümesi  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ 'dir. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $x_n \neq 1$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ , ise  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$  olacak şekilde bir  $(x_n)$  reel sayı dizisi alalım. Dizilerin özelliklerinden şunu elde ederiz:

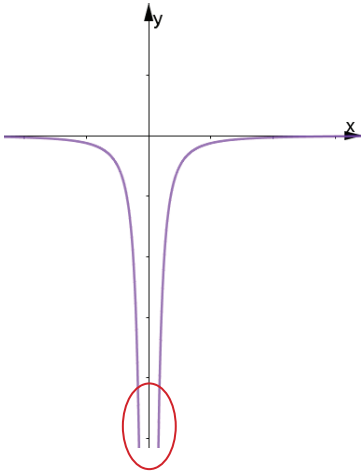
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x_n+1}{x_n-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x_n \left( 2 + \frac{1}{x_n} \right)}{x_n \left( 1 - \frac{1}{x_n} \right)} = \frac{2+0}{1-0} = 2 \text{ elde edilir. Tanım gereği, } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2 \text{ şeklinde}$$

yazabiliriz.

Önceki tanımları göz önünde bulundurarak, aşağıdaki limit değerlerini grafiksel olarak gösterebiliriz.

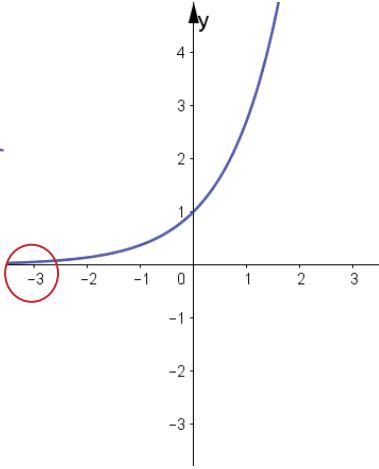
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

$$(x_0 = 0)$$

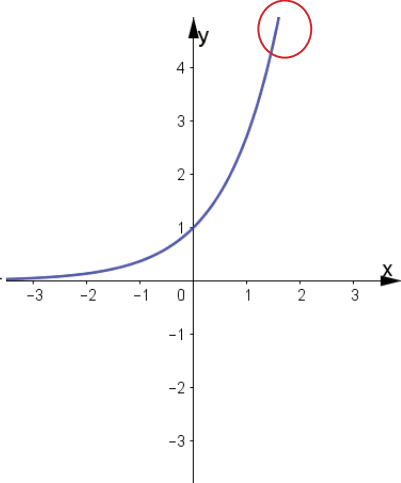


$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$$

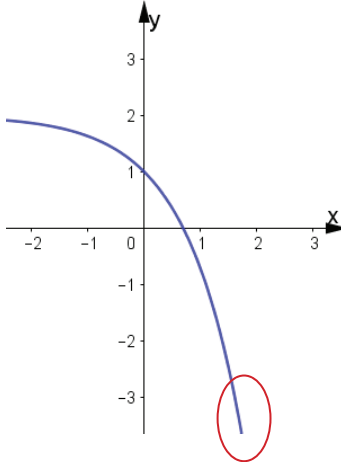
$$(A = 0)$$



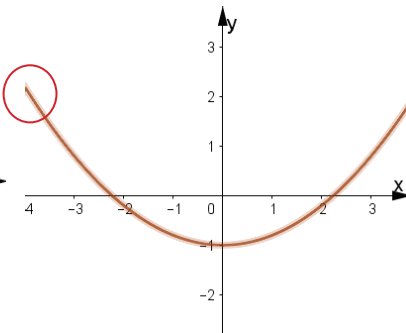
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



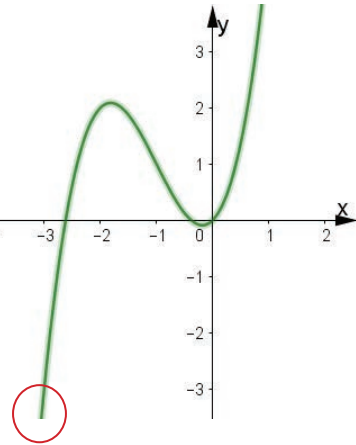
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty = \infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$



### Sol ve sağ limit değerler

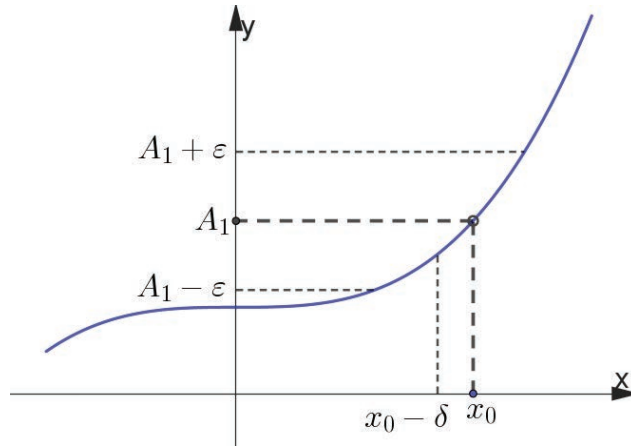
$x$  değişkeni  $x_0$ 'a sadece soldan veya sadece sağdan yaklaştığında fonksiyonun davranışını belirleme ihtiyacı sıklıkla ortaya çıkar. Bu şekilde,  $x_0$  noktasında bir fonksiyonun sol ve sağ limit kavramına ulaşırız.

**Tanım 4:**  $f(x)$  fonksiyonu,  $x_0$  noktası hariç  $(a, x_0)$  aralığında tanımlı olsun. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $x_n \in (a, x_0)$  olacak şekilde ve  $(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0)$  olan her  $(x_n)$  reel sayı dizisi için, fonksiyonun  $(f(x_n))$  değerleri dizisi  $A_1$  reel sayısına yakınsayan yakınsak bir dizi ise  $(\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A_1)$  o zaman  $f(x)$  fonksiyonunun  $x$  değişkeni  $x_0$ 'a soldan yaklaşırken limitinin  $A_1$  sayısı olduğunu söyleriz ve  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A_1$  olarak yazarız.

$A_1$  reel sayısına  $x_0$  noktasında  $f(x)$  fonksiyonunun **sol limit değeri** veya **sol limiti** denir.

**Tanım 5:**  $f(x)$  fonksiyonunda  $x$  değişkeni  $x_0$ 'a soldan yaklaşırken  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A_1$  olarak gösterilen bir **sol limit değerine** sahip olduğunu söyleriz, yani eğer herhangi bir küçük  $\varepsilon > 0$  sayısı için, her  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  için,  $|f(x) - A_1| < \varepsilon$  eşitsizliğini sağlayan bir  $\Delta > 0$  sayısı varsa  $f(x)$  fonksiyonunun soldan limit değeri  $A_1$  dir deriz.

Tanım 5'in geometrik yorumu:



**Örnek 4:**  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2}$  sol limit değerini bulalım.

**Çözüm:** Fonksiyonun tanım kümesi  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ 'dir. Her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $x_n < 2$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$  olacak şekilde bir  $(x_n)$  reel sayı dizisi alalım.  $x_n < 2$ 'den, her  $n \in \mathbb{N}$  için  $x_n - 2 < 0$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 2) = 0$  elde ederiz, oradan da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{x_n - 2} = \frac{3}{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 2)} = -\infty$$

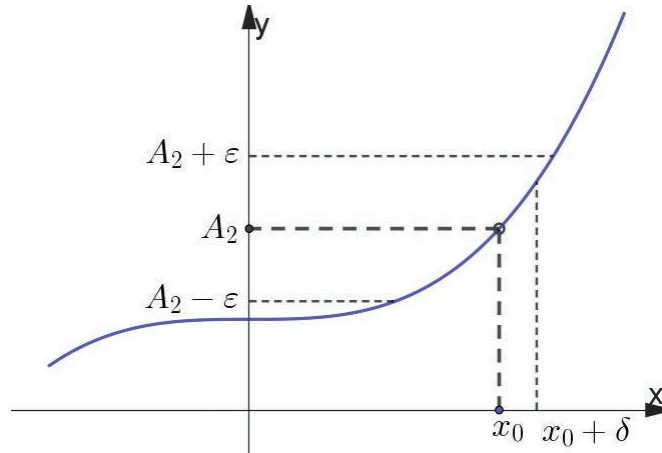
Fonksiyonun sol limiti  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2} = -\infty$  olduğunu yazabiliriz.

**Tanım 6:**  $f(x)$  fonksiyonu,  $x_0$  noktası hariç  $(x_0, b)$  aralığında tanımlı olsun. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $x_n \in (x_0, b)$  olacak şekilde ve  $(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0)$  olan her  $(x_n)$  reel sayı dizisi için, fonksiyonun  $(f(x_n))$  değerleri dizisi  $A_2$  reel sayısına yakınsayan yakınsak bir dizi ise  $(\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A_2)$  o zaman  $f(x)$  fonksiyonunun  $x$  değişkeni  $x_0$ 'a soldan yaklaşırken limitinin  $A_1$  sayısı olduğunu söyleriz ve  $A_2$  ( $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A_2$ ) olarak yazarız.

$A_2$  reel sayısına  $x_0$  noktasında  $f(x)$  fonksiyonunun **sağ limit değeri** veya **sağ limiti** denir.

**Tanım 7:**  $f(x)$  fonksiyonunda  $x$  değişkeni  $x_0$ 'a soldan yaklaşırken  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A_2$  olarak gösterilen bir **sağ limit değerine** sahip olduğunu söyleriz, yani eğer herhangi bir küçük  $\varepsilon > 0$  sayısı için, her  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  için,  $|f(x) - A_2| < \varepsilon$  eşitsizliğini sağlayan bir  $\Delta > 0$  sayısı varsa  $f(x)$  fonksiyonunun sağdan limit değeri  $A_2$  dir deriz.

Tanım 7' nin geometrik yorumu:



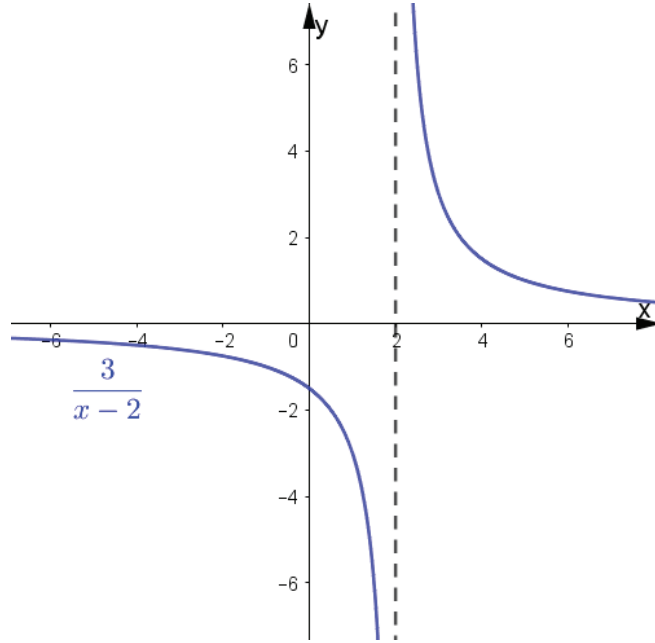
**Örnek 5:**  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2}$  sağ limit değerini bulunuz.

**Çözüm:** Fonksiyonun tanım kümesi  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ 'dir. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $x$  değişkeni  $x_n > 2$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$  olacak şekilde bir  $(x_n)$  reel sayı dizisi alalım.  $x_n > 2$ 'den, her  $n \in \mathbb{N}$  için  $x_n - 2 > 0$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 2) = 0$  elde ederiz, bu da şunu gösterir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{x_n - 2} = \frac{3}{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 2)} = +\infty$$

Sağ limit değerini şu şekilde yazabiliriz:  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2} = +\infty$

Fonksiyonun grafiksel gösterimi ve  $x = 2$  apsisli noktanın komşuluğundaki grafiğin davranışı ( $x = 2$  doğrusu) aşağıdaki gibidir.



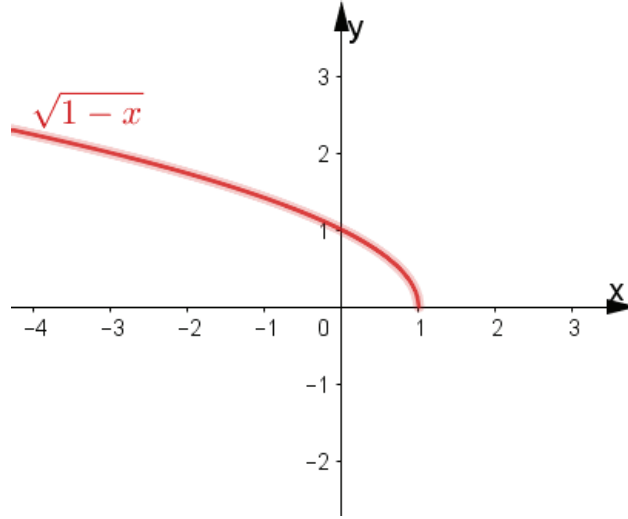
**Örnek 6:**  $f(x) = \sqrt{1-x}$  fonksiyonu verilmiş olsun. Bu fonksiyonun tanım kümesi  $x \leq 1$  dir, yani  $D_f = (-\infty, 1]$  dir. Fonksiyon için sadece soldan limit değeri  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x}$  aranabilir.

**Çözüm:** Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $x_n < 1$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$  olacak şekilde bir  $(x_n)$  reel sayı dizisi alalım.  $x_n < 1$  'den, her  $n \in \mathbb{N}$  için  $1 - x_n > 0$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x_n) = 0$  elde ederiz, bu da şunu gösterir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 - x_n} = 0.$$

Sol limit değerini  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} = 0$  olarak yazabiliriz.

Fonksiyon ve limit değeri çizimde grafiksel olarak gösterilmiştir.



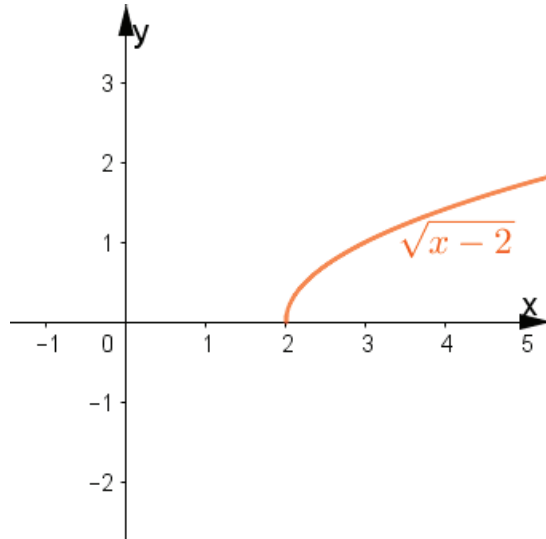
**Örnek 7:**  $f(x) = \sqrt{x-2}$  fonksiyonu verilmiş olsun. Bu fonksiyonun tanım kümesi  $x \geq 2$ , yani  $D_f = [2, +\infty)$ 'dir. Bu fonksiyon için sadece sağdan limit değeri  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2}$  aranabilir.

**Çözüm:** Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $x_n > 2$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$  olacak şekilde bir  $(x_n)$  reel sayı dizisi alalım.  $x_n > 2$ 'den, her  $n \in \mathbb{N}$  için  $x_n - 2 > 0$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 2) = 0$  elde ederiz, bu da şunu gösterir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n - 2} = 0.$$

Sağ limit değerini  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2} = 0$  olarak yazabiliriz.

Fonksiyon ve limit değeri çizimde grafiksel olarak gösterilmiştir.



Eğer  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  ise, fonksiyonun  $x = x_0$  noktasında bir limit değeri vardır. (Fonksiyonun  $x = x_0$  noktasındaki sol ve sağ limitleri eşitse, fonksiyonun o noktada bir limiti vardır ve bu limit sol ve sağ limite eşittir).

Eğer  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  ise, fonksiyonun  $x = x_0$  noktasında bir limit değeri yoktur.

**Örnek 8:**  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x-2}$  limitini hesaplayınız.

**Çözüm:** Daha önce  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2} = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2} = +\infty$  olduğunu hesapladık, dolayısıyla fonksiyonun  $x = 2$  noktasında bir limit değeri yoktur.

**Not:** Bir fonksiyonun bir noktadaki limit değeri, o noktanın komşuluğundaki fonksiyon değerlerinin davranışını temsil eder.

### Fonksiyon limitlerinin özellikleri

Yakınsak dizilerin özelliklerini kullanarak, verilen noktalarda fonksiyonların limit değerlerini kolayca belirleyebileceğimiz bazı işlemlerde limitlerin özellikleri ispatlanabilir.

**Teorem:**  $f(x)$  ve  $g(x)$  fonksiyonları için  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  ve  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$  limitleri varsa, o halde:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \cdot B$$

$$B \neq 0 \text{ olmak üzere, } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B},$$

$$c \in \mathbb{R} \text{ sabit sayı ise, } \lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c \cdot A,$$

$$n \in \mathbb{R} \text{ için } \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = \sqrt[n]{A},$$

$$a \in \mathbb{R}, A \geq 0 \text{ için } \lim_{x \rightarrow x_0} a^{f(x)} = a^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = a^A,$$

### Not:

Fonksiyon limit değerleri ile ilgili tüm bu işlemler,  $x \rightarrow \pm \infty$ 'a vardığı ve  $x_0$  noktasındaki sol ve sağ limit değerleridir durumlar için de geçerlidir.



Çoğu problemde, limit teoremi doğrudan uygulanamaz, ancak fonksiyonların verildiği ifadeleri önce bu iddiaların uygulanabileceği bir ifadeye dönüştürürüz.

**Örnek 1:** Verilen değer için fonksiyonun limit değerini hesaplayınız:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x + 4}$ .

**Çözüm:** Limit değerini hesaplamak için önce paydanın limit değerini hesaplayalım:

$\lim_{x \rightarrow 2} (x + 4) = \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 4 = 2 + 4 = 6 \neq 0$ . Verilen teorem gereğince

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x + 4)} = \frac{2^2 - 1}{2 + 4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

**Örnek 2:** Verilen değer için fonksiyonun limit değerini hesaplayalım:

a)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

**Çözüm:** Pay ve paydadaki fonksiyonların limit değerleri için şunları elde ederiz:

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 4) = (-2)^2 - 4 = 0 \text{ ve } \lim_{x \rightarrow -2} (x + 2) = (-2) + 2 = 0,$$

bu nedenle bölümün limit değeri için  $\frac{0}{0}$  belirsizliği elde edilir. Ancak bu, fonksiyonun  $x \rightarrow -2$  iken limit değerinin olmadığı anlamına gelmez. Limit değerini hesaplamak için önce kesri dönüştüreceğiz, böylece payı kısaltılmış formülü kullanarak çarpanlarına ayıracağız ve ardından  $x + 2$  ile sadeleştireceğiz (bu mümkündür, çünkü  $x - 2$ 'ye yaklaşıyor,  $-2$ 'ye eşit değildir, bu nedenle  $x + 2 \neq 0$ ) ve sonunda teoremi uygulayacağız.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) = -2 - 2 = -4$$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 7x}{x^2 + x}$

**Çözüm:** a) şıkkındaki problemle aynı nedenlerden dolayı, pay ve paydadaki fonksiyonların limitleri 0'a eşittir ve ilk eşitlik işaretinin üzerine yazarız, ardından payı ve paydayı çarpanlara ayırarak dönüştürürüz ve aynı çarpanla sadeleştiririz. Böylece elde şunu elde ederiz:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 7x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x - 7)}{x(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - 7)}{(x + 1)} = \frac{0 - 7}{0 + 1} = -7$$

Bundan sonra, ilk adımları zihinsel olarak hesaplayacağız ve sonuçları ilk eşitlik işaretinin üzerine yazacağız, ardından dönüşümlere ve limit değerini hesaplama teoremine uygulamaya devam edeceğiz.

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\text{Çözüm: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{0}$$

$x^2 - 4x + 3 = 0$  ikinci derece denkleminin çözümleri  $x_1 = 1$  ve  $x_2 = 3$ 'tür, bu nedenle paydaki ikinci derece polinom  $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$  doğrusal çarpanlarına ayrılır.

$x^2 - 3x + 2 = 0$  ikinci derece denkleminin çözümleri  $x_1 = 1$  ve  $x_2 = 2$ 'dir, bu nedenle paydadaki ikinci derece polinom  $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$  doğrusal çarpanlarına ayrılır.

Şimdi yerine koyma ve limit değerleri işlemleri teoremini kullanarak şunu elde ederiz:

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-3)}{(x-2)} = \frac{1-3}{1-2} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$ç) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$$

$$\text{Çözüm: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2 + x + 1} = \frac{1+1}{1^2 + 1 + 1} = \frac{2}{3}$$

**Örnek 3:** Verilen değer için fonksiyonun limit değerini hesaplayın:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$$

**Çözüm:** Aşağıdaki problemde payı rasyonalize etme yöntemini kullanacağız.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{2})^2}{(x-2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x-2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+9}-3}$$

**Çözüm:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+9}-3} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+9}-3} \cdot \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} \cdot \frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4})^2 - 2^2}{(\sqrt{x+9})^2 - 3^2} \cdot \frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+4}+2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4-4}{x+9-9} \cdot \frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+4}+2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+4}+2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{\sqrt{0+9}+3}{\sqrt{0+4}+2} = \frac{3+3}{2+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$$

**Çözüm:**  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{1+2x}+3} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-8+2x}{x-4} \cdot \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)}{x-4} \cdot \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3} =$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{4}+2}{\sqrt{9}+3} = 2 \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{3}$$

**Örnek 4:** Verilen değer için fonksiyonun limit değerini hesaplayın:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x^2-2x+7}$$

**Çözüm:**  $x \rightarrow \infty$  olduğunda pay ve payda sonsuz büyük büyüklüklerdir ve bölümleri belirsizdir  $\frac{\infty}{\infty}$ . Bu nedenle ifadeyi önce dönüştürürüz (pay ve paydadan en büyük  $x$  derecesini ayırırız, bu örnekte  $x^2$ 'dir) ve ardından limit değeri teoremi kullanılabilir.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x^2-2x+7} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left( \frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left( \frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{7}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}} = \frac{1-0}{1-0+0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^3 + x + 5}$$

**Çözüm:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^3 + x + 5} & \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left( \frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2} \right)}{x^3 \left( \frac{x^3}{x^3} + \frac{x}{x^3} + \frac{5}{x^3} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 \left( 1 - \frac{4}{x^2} \right)}{x \left( 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right)} = \\ & = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{\left( 1 - \frac{4}{x^2} \right)}{\left( 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right)} = 0 \cdot \frac{1 - 0}{1 + 0 + 0} = 0 \end{aligned}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{3x^2 - 4}$$

**Çözüm:** İlerde bazı ödevlerin çözümünde kullanılacak kısa uygulama:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{3x^2 - 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{3}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 3 - \frac{4}{x^2} \right)} = \frac{1}{3}$$

**Örnek 5:** Verilen değer için fonksiyonun limit değerini hesaplayınız:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right)$$

**Çözüm:**  $x \rightarrow \infty$  olduğunda, ilk ve ikinci kesir sonsuz büyük büyüklüklerdir ve belirsizlik  $(\infty - \infty)$  ortaya çıkar, bu nedenle ifadeyi önce dönüştürürüz.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right) & \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3(3x + 2) - x^2(3x^2 - 4)}{(3x^2 - 4)(3x + 2)} \right) = \\ & = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^4 + 2x^3 - 3x^4 + 4x^2}{(3x^2 - 4)(3x + 2)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^3 + 4x^2}{(3x^2 - 4)(3x + 2)} \right) = \\ & = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \cdot \left( \frac{2x^3}{x^3} + \frac{4x^2}{x^3} \right)}{x^2 \cdot \left( \frac{3x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2} \right) \cdot x \cdot \left( \frac{3x}{x} + \frac{2}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{4}{x}}{\left( 3 - \frac{4}{x^2} \right) \left( 3 + \frac{2}{x} \right)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{2+0}{(3-0)(3+0)} = \frac{2}{9}$$

**Örnek 6:**  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2}$  sol limit değerini hesaplayınız.

**Çözüm:**  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2}$  sol limit değerini  $x = 2 - h$  değişimiyle bulacağız, burada  $h > 0$  ve  $h \rightarrow 0$ . Böylece elde ederiz:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{2-h-2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{-h} = -\infty$$

**Örnek 7:**  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2}$  sağ limit değerini bulun.

**Çözüm:**  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2}$  sağ limit değerini  $x = 2 + h$  değişimiyle bulacağız, burada  $h > 0$  ve  $h \rightarrow 0$ . Böylece elde şunu elde ederiz:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{2+h-2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{h} = +\infty$$

**Örnek 8:**  $f(x) = \sqrt{3-x}$  fonksiyonu verilsin, bu fonksiyonun tanım kümesi  $x \leq 3$ , yani  $D_f = (-\infty, 3]$  'tür. Bu fonksiyon için sadece sol limit değeri  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{3-x}$  aranabilir.

**Çözüm:**  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{3-x} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{3-(3-h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{h} = 0$ . Burada  $h > 0$  ve  $h \rightarrow 0$  olacak şekilde  $x = 3 - h$  değişimini yaptık.

**Örnek 9:**  $f(x) = 2 + \sqrt{x-1}$  fonksiyonu verilsin, bu fonksiyonun tanım kümesi  $x \geq 1$ , yani  $D_f = [1, +\infty)$  'dir. Bu fonksiyon için sadece sağ limit değeri  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2 + \sqrt{x-1})$  aranabilir.

**Çözüm:**  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2 + \sqrt{x-1}) = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + \sqrt{(1+h)-1}) = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + \sqrt{h}) = 2 + 0 = 2$ .

Burada  $h > 0$  ve  $h \rightarrow 0$  olacak şekilde  $x = 1 + h$  değişimini yaptık.

**Örnek 10:**  $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$  fonksiyonu  $x = 2$ 'de tanımlı değildir.

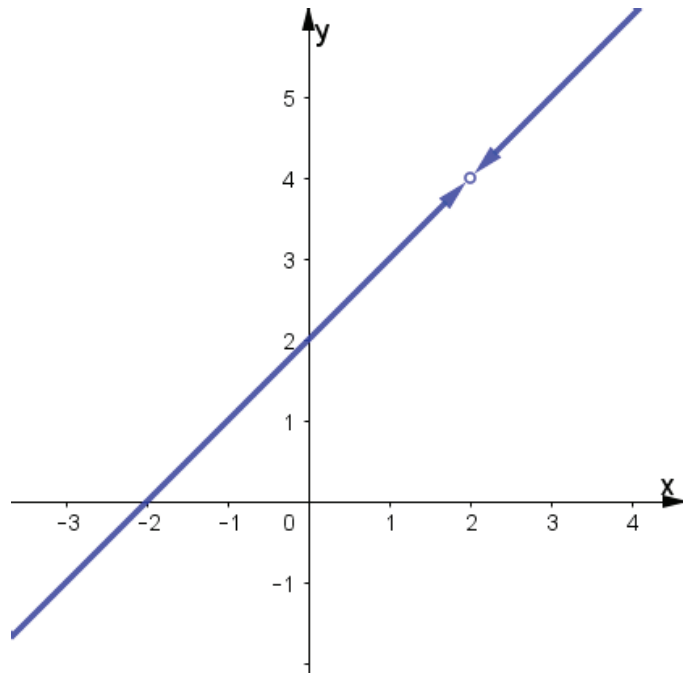
$x \rightarrow 2$  iken  $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$  belirli bir değere yaklaşır mı? Limit değerini hesaplayınız ve fonksiyonu grafiksel olarak gösteriniz.

**Çözüm:**  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$  fonksiyonu  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$  tanım kümesi ile verilsin.

$x = 2$  noktasının komşuluğundaki fonksiyonun değerini inceleyelim. Aşağıdaki tabloda, genel terimi  $x_n = 2 + \frac{4}{10^n}$  olan ve 2'ye yaklaşan bir diziden elde edilen bazı fonksiyon değerleri verilmiştir.

|        |     |      |       |        |                       |
|--------|-----|------|-------|--------|-----------------------|
| $x$    | 2,4 | 2,04 | 2,004 | 2,0004 | $\dots \rightarrow 2$ |
| $f(x)$ | 4,4 | 4,04 | 4,004 | 4,0004 | $\dots \rightarrow 4$ |

Fonksiyonun grafiksel gösterimi:



Fonksiyon  $x = 2$  noktasında tanımlı değildir, ancak sol ve sağ limit değerleri vardır ve bunlar eşittir.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 2) = \lim_{h \rightarrow 0} (2 - h + 2) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + h + 2) = 4$$

Dolayısıyla, fonksiyonun limit değeri  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$  elde edilir.

## Alıştırma Soruları:

1. Verilen limit değerleri belirtiniz:

a)  $\lim_{x \rightarrow -2} (2x^2 - 5x + 1)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-4}{3x+1}$

2. Aşağıdaki fonksiyonların sol ve sağ limitlerini bulun:

a)  $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$  te  $x_0 = 1$

b)  $f(x) = \frac{x-4}{x+2}$  te  $x_0 = -2$

c)  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2 - 6x + 8}$  te  $x_0 = 2$

ç)  $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$  te  $x_0 = 1$

d)  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$  te  $x_0 = 0$

dh)  $f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$  te  $x_0 = 0$

3. Aşağıdaki limit değerlerini bulun:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + 5x^4 + 4x}{x^5 + 2x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 2x + 1}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2}$

ç)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - a}{x - a}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{6}}{x}$

dh)  $\lim_{x \rightarrow b} \frac{x - b}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{b}}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$

4. Aşağıdaki limit değerlerini bulun:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{2x^2}{x^2-1} \right)$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{3x^2-4} - \frac{x^2}{3x+5} \right)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{x+6}{x^2-16} - \frac{x+1}{x^2-4x} \right)$

ç)  $\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{1}{x+2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$

d)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \left( \frac{4x+3}{3x-1} - \frac{12x^2+7x+5}{9x^2-1} \right)$

dh)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+4x} - x)$

e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2x-5} - x)$

5. Şu limit değerleri bulunuz:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 + 9x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{4x^2 + x + 2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1}$

ç)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - x^2 + 4x - 3}{3x^2 - 4x + 1}$

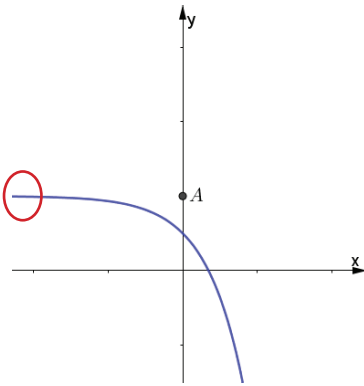
d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x - 3}$

dh)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + a} - \sqrt{x})$

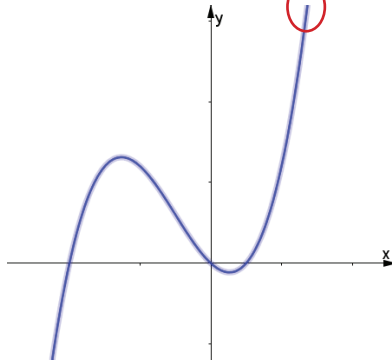
e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + bx})$

6. Aşağıda bazı fonksiyonların grafikleri gösterilmiştir. Kırmızı yuvarlak çizgi ile işaretlenen bölgelerde sırasıyla fonksiyonların limitlerini belirtiniz.

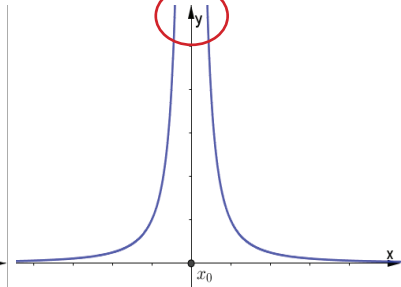
a)



b)



c)



Resimleri sunulan uygun cevaplarla eşleştiriniz:

1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ,

2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ ,

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$



## 2. FONKSİYONUN SÜREKLİLİĞİ

Fonksiyonun sürekliliği, matematikte çok önemli bir kavramdır. Birçok doğal olay ve teknolojik süreç, gerçek fonksiyonların sürekliliği ile ilişkilidir. Kavramın tanımı, bir fonksiyonun limit değeri ile ilişkilidir.

Fonksiyonların birkaç örneğine bakalım ve onlar için neyin geçerli olduğunu görelim.

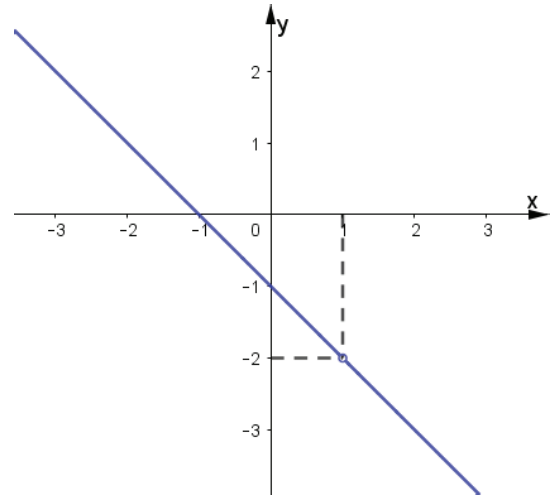
**Örnek 1:**  $x_0 = 1$  noktasındaki fonksiyonların limit değerini bulun. Bu noktadaki limit değeri ve fonksiyon değeri hakkında ne sonuç çıkarılabilir?

a)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{1 - x}$

**Çözüm:** Tanım kümesi  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  dir.

$x_0 = 1$  için fonksiyonun değeri mevcut değildir ve limit değeri için şunu elde ederiz: (boş bir nokta ile gösterilmiştir)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{1 - x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = -2 \end{aligned}$$



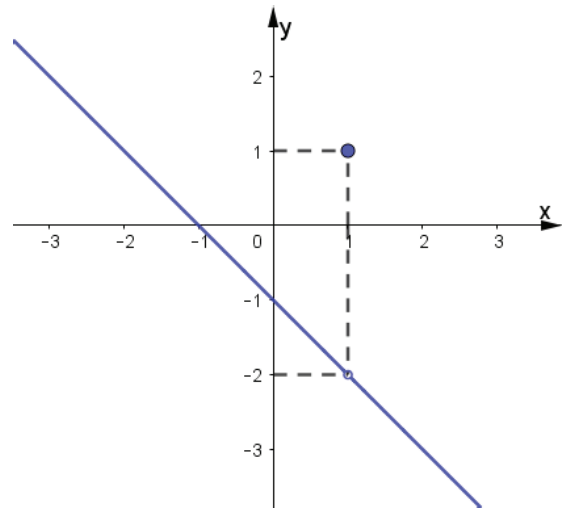
b)  $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{1 - x}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

**Çözüm:** Tanım kümesi  $D_g = \mathbb{R}$ .

$x_0 = 1$  için fonksiyonun değeri  $g(1) = 1$ 'dir ve limit değeri için şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{1 - x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = -2 \end{aligned}$$

Bu nedenle,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{1 - x} = -2 \neq 1 = g(1)$  elde edilir.



$$c) h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{1-x}, & x \neq 1 \\ -2, & x = 1 \end{cases}$$

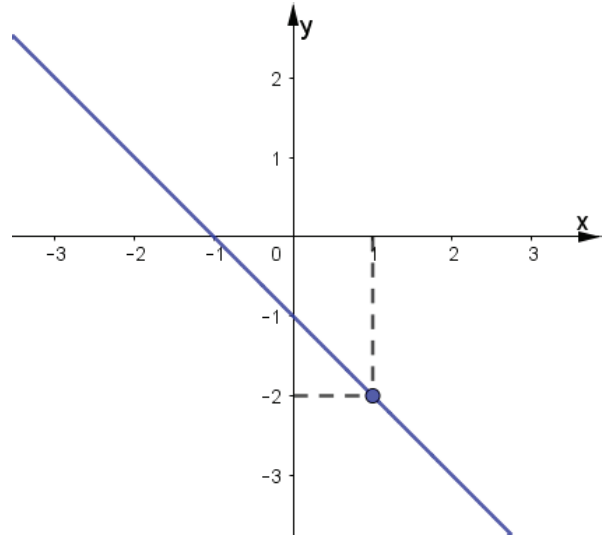
**Çözüm:** Tanım kümesi  $D_f = R'$ dir.

$x_0 = 1$  için fonksiyonun değeri  $h(1) = -2$ 'dir ve limit değeri için şunu elde ederiz:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} =$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = -2$$

O halde,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{1-x} = -2 = -2 = h(1)$ .



Bu şekilde şunları elde ettik:

- a)  $f(x)$  fonksiyonu  $x_0 = 1$  noktasında tanımlı değil, ancak bu noktada bir limit değeri var.
- b)  $g(x)$  fonksiyonu  $x_0 = 1$  noktasında tanımlı, bu noktada bir limit değeri var, ancak bunlar eşit değil.
- c)  $h(x)$  fonksiyonu  $x_0 = 1$  noktasında tanımlı, bu noktada bir limit değeri var ve bunlar eşittirler.

Buna göre,  $h(x)$  fonksiyonu  $x_0 = 1$  noktasında süreklidir ve  $f(x)$  ve  $g(x)$  fonksiyonları bu noktada süreksizdir.

**Tanım 1:**  $D_f$  kümesinde tanımlı bir  $f(x)$  fonksiyonu için, şu durumlarda  $x_0 = x$  noktasında süreklidir denir:

- 1)  $f(x)$  fonksiyonu  $x_0 = x$  noktasında tanımlıdır, yani  $x_0 \in D_f$ ,
- 2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  vardır.
- 3)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

$f(x)$  fonksiyonu 1) – 3) koşullarından birini sağlamazsa,  $x_0$ 'da süreksizdir.  $x_0$  noktasına **süreksizlik noktası** denir.

Örnek 2:  $f(x) = \frac{2x}{3-x}$  fonksiyonunun  $x = 2$  noktasındaki sürekliliğini inceleyelim.

**Çözüm:** Tanımdaki koşulların karşılanıp karşılanmadığını kontrol ediyoruz.

Fonksiyonun tanım kümesi  $D_f = R \setminus \{3\}$ 'tür.

1.  $2 \in D_f$  olduğuna göre,  $f(2) = \frac{2 \cdot 2}{3-2} = 4$  değerini belirleyebiliriz.

2.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{3-x} = \frac{2 \cdot 2}{3-2} = 4$ , yani  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  vardır.

3.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 = f(2)$ .

Tanıma göre,  $f(x) = \frac{2x}{3-x}$  fonksiyonu  $x = 2$  apsisli noktada süreklidir.

Örnek 3:  $f(x) = \frac{2x}{3-x}$  fonksiyonunun  $x = 3$  noktasındaki sürekliliğini inceleyiniz.

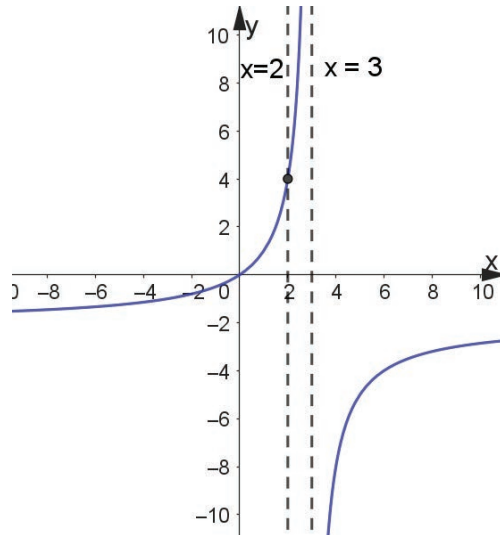
**Çözüm:** Tanımdaki koşulların karşılanıp karşılanmadığını kontrol ediyoruz.

Fonksiyonun tanım kümesi  $D_f = R \setminus \{3\}$ 'tür.

1.  $3 \notin D_f$  ve  $f(3) = \frac{2 \cdot 3}{3-3} = \frac{6}{0}$  (sıfıra bölme mümkün değil!!!) değeri belirtilemez.

Tanımdaki koşullardan biri karşılanmadığı için, diğer koşulları kontrol etmeye devam edemeyiz ve  $f(x) = \frac{2x}{3-x}$  fonksiyonunun  $x = 3$  noktasında bir kesiklilik söz konusu olduğu sonucuna varırız, yani süreksizdir.

Fonksiyonun grafiksel gösterimi:



**Tanım 2:**  $y = f(x)$  fonksiyonu,  $A \subseteq D_f$  kümesinde sürekli olmak için,  $A$ 'daki her  $x_0$  noktasında sürekli olmalıdır.

**Örnek 4:**  $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$  fonksiyonunun tüm tanım kümesindeki sürekliliğini inceleyiniz.

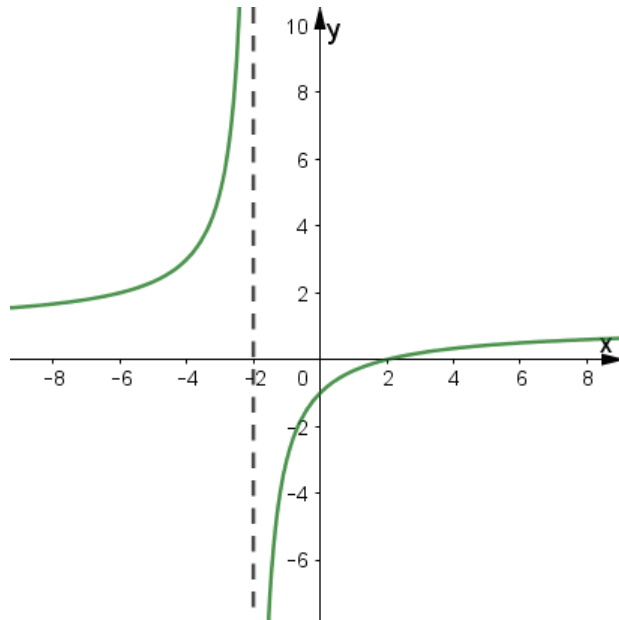
**Çözüm:** Fonksiyonun tanım kümesi  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ 'dir.  $a$  sayısı  $-2$ 'den farklı herhangi bir reel sayı olsun. Şu sonuçları elde ederiz:

1.  $a \in D_f$  ve  $a \neq -2$  için  $f(a) = \frac{a-2}{a+2}$  değerini belirtebiliriz,
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-2}{x+2} = \frac{a-2}{a+2}$  limiti vardır,
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{a-2}{a+2} = f(a)$

Bu nedenle,  $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$  fonksiyonu,  $x = a \in D_f$  noktasında sürekli dir.  $a$ , fonksiyonun tanım kümesindeki herhangi bir reel sayı olduğundan, fonksiyon tüm tanım kümesinde sürekli dir.

Fonksiyon,  $a = -2$  noktasında tanımlı değildir, bu nedenle tanımdan fonksiyonun  $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$  için bu noktada süreksiz olduğu sonucu elde edilir.

Fonksiyonun grafiksel gösterimi:



**Teorem:**  $f(x)$  ve  $g(x)$  fonksiyonları  $x = x_0 \in D_f \cap D_g$  noktasında sürekli olduğu durumda,  $x = x_0$  noktasında aşağıdaki fonksiyonlar da sürekli dir:

$$f(x) + g(x), f(x) \cdot g(x) \text{ ve } \frac{f(x)}{g(x)}, g(x_0) \neq 0 \text{ ise.}$$

**Örnek 5:**  $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$  fonksiyonunun süreksizlik noktalarını belirtiniz.

**Çözüm:** Fonksiyonun tanım kümesi  $D_f = R \setminus \{-2, 2\}$ 'dir.

Önce tanım kümesindeki her noktayı ele alalım.

1.  $a \in D_f$  ve  $a \neq -2$  ve  $a \neq 2$  için  $f(a) = \frac{a+2}{a^2-4}$  değerini belirtebiliriz.

2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x+2}{x^2-4} = \frac{a+2}{a^2-4}$  limiti vardır,

3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{a+2}{a^2-4} = f(a)$ .

Bu nedenle, fonksiyon her  $a \in D_f$  noktası için sürekli dir.

Fonksiyon  $x = -2$  ve  $x = 2$  noktalarında tanımlı değildir, bu nedenle tanımdan bu noktaların  $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$  fonksiyonu için süreksizlik (kesiklilik) noktaları olduğu sonucu elde edilir.

Bu noktalardaki limit değerleri için şunu elde ederiz:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{4}$$

Demek ki,  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\frac{1}{4} = \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$  elde edilir.

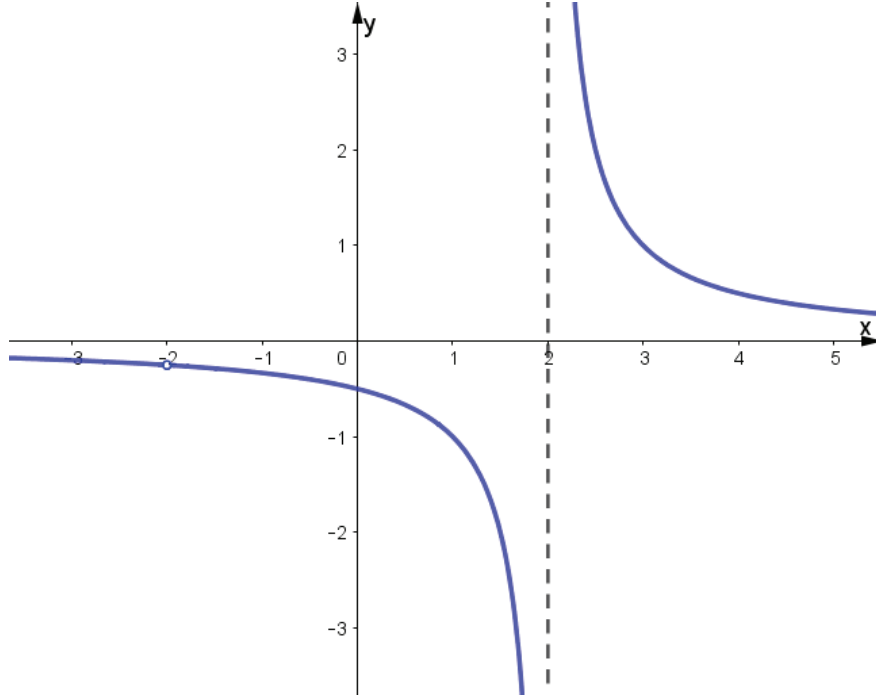
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

Demek ki,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ .

Sonuç olarak,  $x = -2$  süreksizlik noktasında fonksiyonun bir limit değeri vardır, ancak  $x = 2$  süreksizlik noktasında ne bir limit değeri ne de sonsuz bir limit vardır.

Fonksiyonun grafiği:



**Not:**  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ , polinom fonksiyonu,  $n \in \mathbb{N}$  için,  $a_0, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$  için, tüm reel sayılar kümesinde süreklidir.

İspatı, örnek 5'in ilk kısmında yapıldığı gibi, benzer şekilde yapılır.

**Örnek 6:**  $f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ x-1, & x > 0 \end{cases}$  fonksiyonunun sürekliliğini inceleyelim.

**Çözüm:**  $x \leq 0$  için  $f(x)$  sabit bir fonksiyondur, yani  $y = -1$ , bu da her noktada süreklidir.

$x > 0$  için  $f(x)$  birinci dereceden bir polinom fonksiyonudur ve her noktada süreklidir.

Tek kritik nokta  $x = 1$ 'dir, çünkü fonksiyon noktanın solunda ve sağında farklı ifadelerle tanımlanmıştır.  $x = 0$  kontrol edelim.

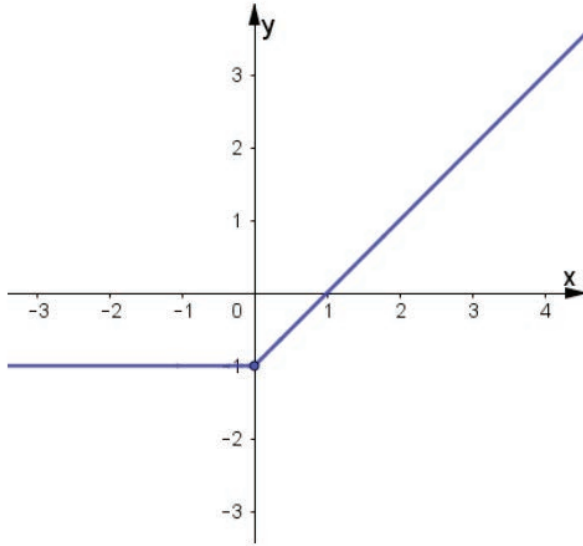
$$1. f(0) = -1,$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1 \text{ ve } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1) = -1 \text{ bu da } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1, \text{ anlamına gelir,}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 = f(0).$$

Fonksiyonun  $x = 0$ 'da sürekli olduğu sonucu elde edilir.

Fonksiyonun Grafiksel Gösterimi:



$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 4 \\ x + 4, & x > 4 \end{cases}$$

Örnek 7: fonksiyonu sürekli midir?

**Çözüm:** "Sorunlu noktalar"  $x = 0$  ve  $x = 4$ 'ü inceliyoruz. Diğer tüm noktalarda, yani aralıklarda, fonksiyon sürekli dir.

$x = 0$  için tanım koşullarını kontrol ediyoruz:

1.  $f(0) = 0$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$  ve  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$ , bu nedenle  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ .

Fonksiyonun  $x = 0$  noktasında sürekli olduğunu elde ederiz.

Şimdi  $x = 4$  için tanım koşullarını kontrol ediyoruz:

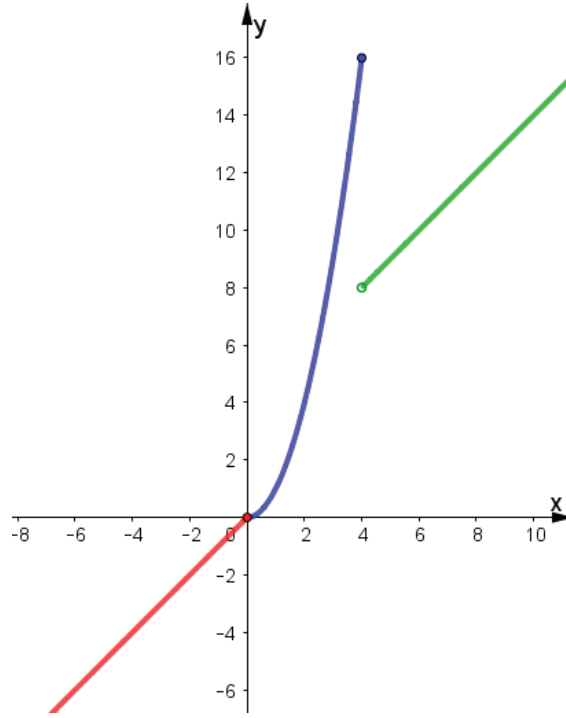
1.  $f(4) = 16$ ,

2.  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} x^2 = 16$  ve  $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (x + 4) = 8$ ,

$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$  olduğundan,  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$  yoktur.

Bu nedenle, fonksiyon  $x = 4$  noktasında süreksizdir.

Fonksiyonun grafiği:



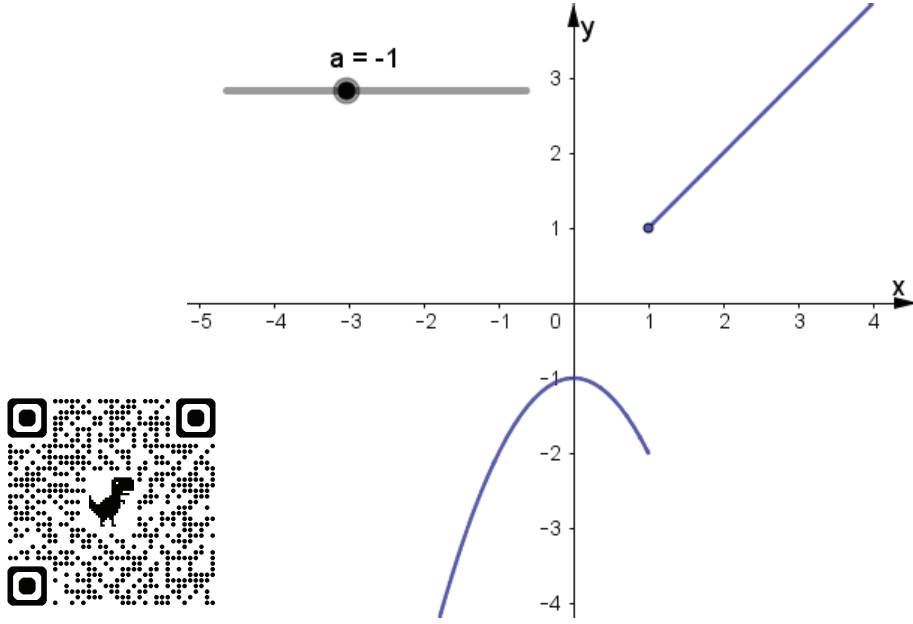
Örnek 8:  $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 1, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$  fonksiyonunun sürekli olmasını sağlayacak bir  $a$  reel sayısı var mı?

**Çözüm:** Önce araştıralım. GeoGebra’da oluşturulmuş bir uygulama kullanarak,  $a$  kaydırıcısını hareket ettirelim ve fonksiyonun hangi  $a$  değeri için sürekli olacağını gözlemleyelim.

Sürekliliği grafiksel olarak belirleyeceğimiz bir animasyon uygulaması.

**Not:** Neyi fark etmemiz gerekiyor ve ne zaman sürekli olacaktır? Kaydırıcının değerini hareket ettirerek  $ax^2 - 1$  fonksiyonunun grafiği değişir. Apsisi  $x = 1$  olan bir noktada iki grafiğin bağlanmasını istiyoruz.





<https://www.geogebra.org/m/suemrzya>

$x < 1$  için  $f(x)$  ikinci dereceden bir polinom fonksiyonudur ve her noktada süreklidir.

$x \geq 1$  için  $f(x)$  birinci dereceden bir polinom fonksiyonudur ve her noktada süreklidir.

Tek kritik nokta  $x = 1$ 'dir, çünkü fonksiyon bu noktanın solunda ve sağında farklı ifadelerle tanımlanmıştır.  $a$  parametresinin hangi değeri için  $f(x)$  fonksiyonu  $x = 1$ 'de sürekli olacaktır? Tanıma göre:

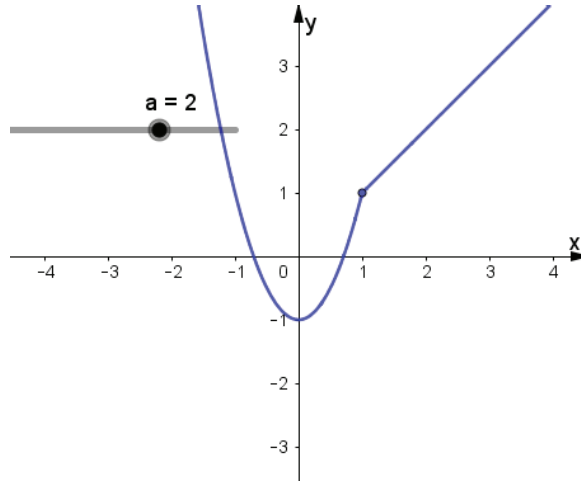
1.  $f(1) = 1$ ,
2.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 - 1) = a - 1$  ve  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$ ,

Bu nedenle, limit değerinin var olması için  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  olması gerekir, yani  $a - 1 = 1$ , buradan  $a = 2$  elde ederiz.

3.  $a = 2$  değeri için  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1)$  elde ederiz.

Demek ki, fonksiyon  $x = 1$ 'de süreklidir, yani fonksiyon her reel sayı için süreklidir.

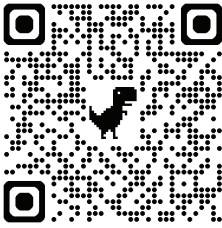
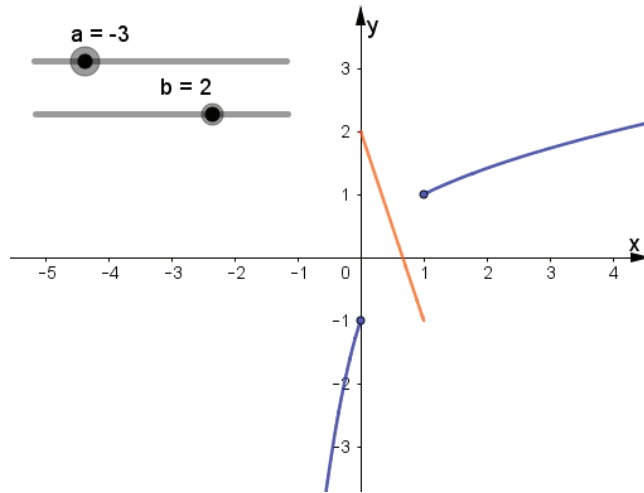
Sürekli fonksiyonun grafiksel gösterimi:



**Örnek 9:**  $a$  ve  $b$  parametrelerinin hangi değeri için  $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x \leq 0 \\ ax+b, & 0 < x < 1 \\ \sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}$  fonksiyonu sürekli?

**Çözüm:** Önce araştıralım. GeoGebra’da oluşturulmuş bir uygulama kullanarak,  $a$  ve  $b$  kaydırıcılarını hareket ettirelim ve parametrelerin hangi değeri için fonksiyonun sürekli olacağını gözlemleyelim.

Fonksiyonun sürekliliğini grafiksel olarak belirleyeceğimiz bir animasyon uygulaması.



<https://www.geogebra.org/m/kvt6aayw>

$x \leq 0$  için  $f(x)$  sürekli fonksiyondur.

$0 < x < 1$  için  $f(x)$  birinci dereceden bir polinom fonksiyonudur ve her noktada sürekli.

$x \geq 1$  için  $f(x)$  bir kuvvet fonksiyonudur ve tanım kümesindeki her noktada süreklidir.

Kritik noktalar  $x = 0$  ve  $x = 1$ 'dir, çünkü fonksiyon bu noktaların solunda ve sağında farklı ifadelerle tanımlanmıştır.  $a$  ve  $b$  parametrelerinin hangi değeri için  $f(x)$  fonksiyonu sürekli olacaktır?

Tanımdan, fonksiyonun  $x = 0$ 'da sürekli olması için öncelikle neyin sağlanması gerektiğini belirleyelim:

$$1) f(0) = (0-1)^3 = -1,$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1)^3 = -1 \text{ ve } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax+b) = b,$$

Bu nedenle, limit değerinin var olması için  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  olması gerekir, yani  $-1 = b$ , buradan  $b = -1$  elde ederiz.

$$3. b = -1 \text{ değeri için } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 = f(0) \text{ elde ederiz.}$$

Tanımdan, fonksiyonun  $x = 1$ 'de sürekli olması için neyin sağlanması gerektiğini belirleyelim:

$$1) f(1) = \sqrt{1} = 1,$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax+b) = a+b \text{ ve } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{x}) = 1,$$

Bu nedenle, limit değerinin var olması için  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  olması gerekir, yani  $a+b=1$ .

$$3. a+b=1 \text{ değeri için } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1) \text{ elde ederiz.}$$

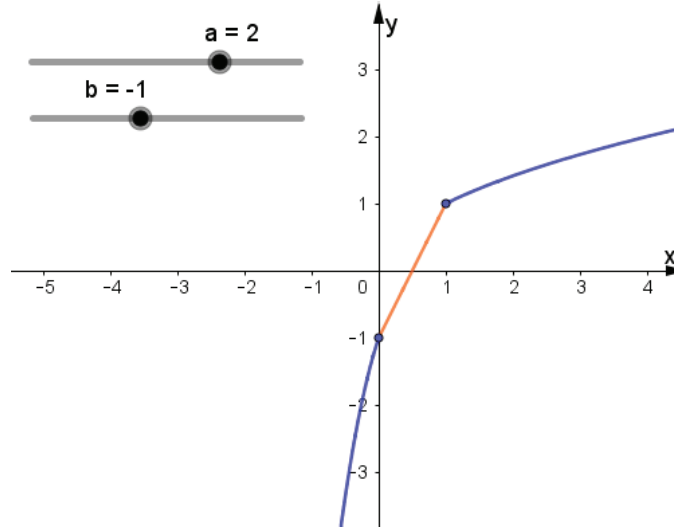
Fonksiyonun her iki noktada da sürekli olması için her iki koşulun da sağlanması gerekir, yani şu denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{cases} b = -1 \\ a + b = 1 \end{cases} \text{ Bu denklem sistemini çözerek } \begin{cases} b = -1 \\ a + (-1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 1 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 2 \end{cases} \text{ elde edilir.}$$

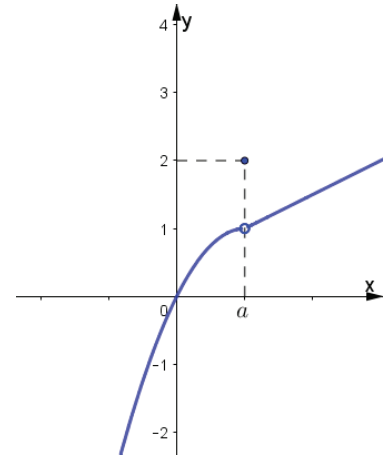
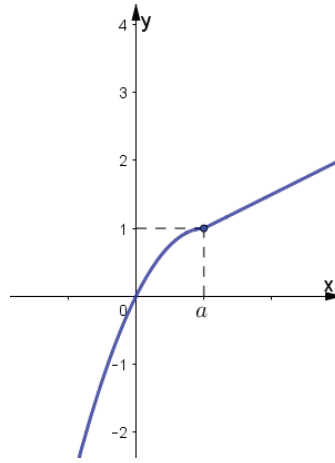
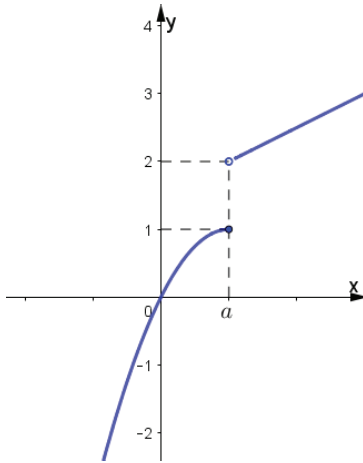
Fonksiyonun  $x = 0$  ve  $x = 1$  noktalarında sürekli olması için parametrelerin değerleri  $a = 2$  ve  $b = -1$ 'dir ve bu şekilde aranan fonksiyonu elde ederiz:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x \leq 0 \\ 2x-1, & 0 < x < 1 \\ \sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Sürekli fonksiyonun grafiksel gösterimi:



**Örnek 10:** Aşağıdaki fonksiyonlar grafiksel olarak verilmiştir. Onlardan hangilerinin  $x = a$  için sürekli olduğunu ve varsa fonksiyonun bu noktadaki limit değerini belirtiniz.



**Çözüm:**

$$f(a) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 2$$

Limit değeri yoktur.

$f(x)$ ,  $x = a$  noktasında kesiklidir.

$$f(a) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 1$$

Limit değeri vardır

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1,$$

$f(x)$ ,  $x = a$  noktasında sürekli.

$$f(a) = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 1$$

Limit değeri vardır

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1,$$

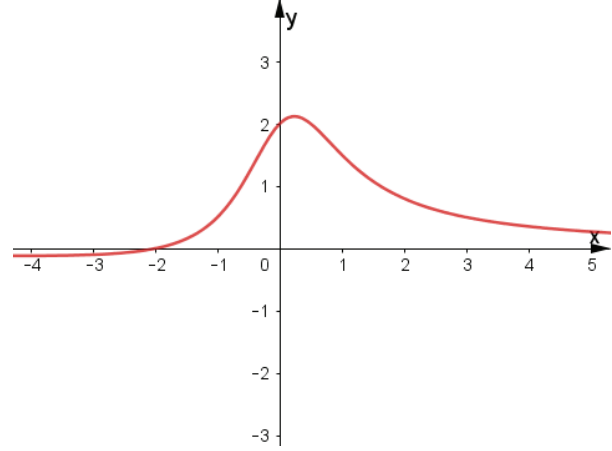
$f(x)$ ,  $x = a$  noktasında sürekli.

## Alıştırma Soruları:

1. Verilen aralıkta fonksiyonların sürekliliğini ispatlayınız:

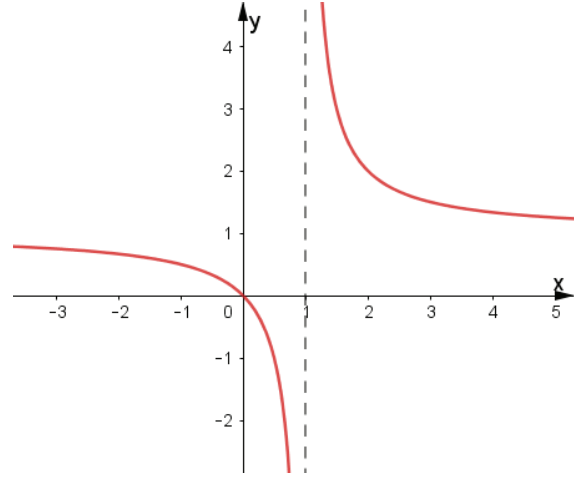
a)  $f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$  için

Fonksiyonun grafiği sağda gösterilmiştir.



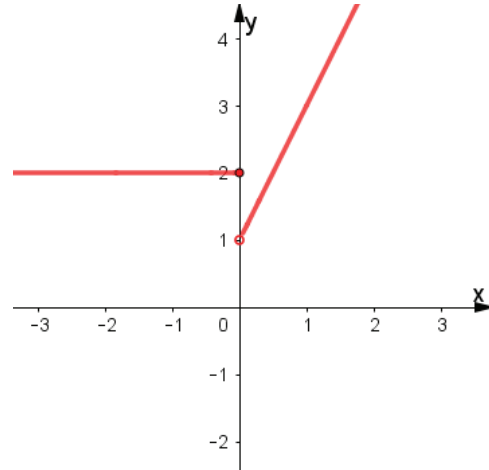
b)  $f(x) = \frac{x}{x-1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  için

Fonksiyonun grafiği sağda gösterilmiştir.

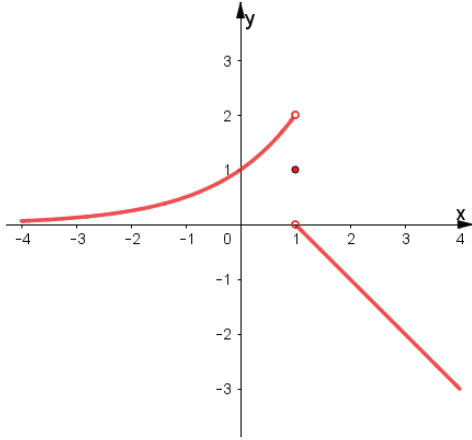


2. Fonksiyonların süreksizlik (kesikli olduğu) noktalarını bulunuz:

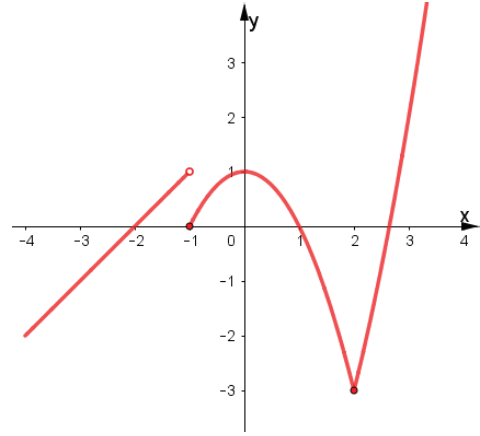
a)  $f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 0 \\ 2x+1, & x > 0 \end{cases}$



$$b) f(x) = \begin{cases} 2^x, & -4 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -x+1, & 1 < x \leq 4 \end{cases}$$



$$c) f(x) = \begin{cases} x+2, & x < -1 \\ 1-x^2, & -1 \leq x < 2 \\ x^2-7, & x \geq 2 \end{cases}$$



3. Bir şehirdeki hanelerin aylık elektrik faturası şu fonksiyonla verilir:

$$f(x) = \begin{cases} 180, & 0 \leq x \leq 2 \\ 180 + 23(x-2), & x > 2 \end{cases}$$

$f(x)$  fonksiyonunun sürekliliğini inceleyiniz.

4.  $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ 3-ax^2, & x > 1 \end{cases}$  fonksiyonunun sürekli olmasını sağlayacak bir  $a$  reel sayısı belirlenebilir mi?

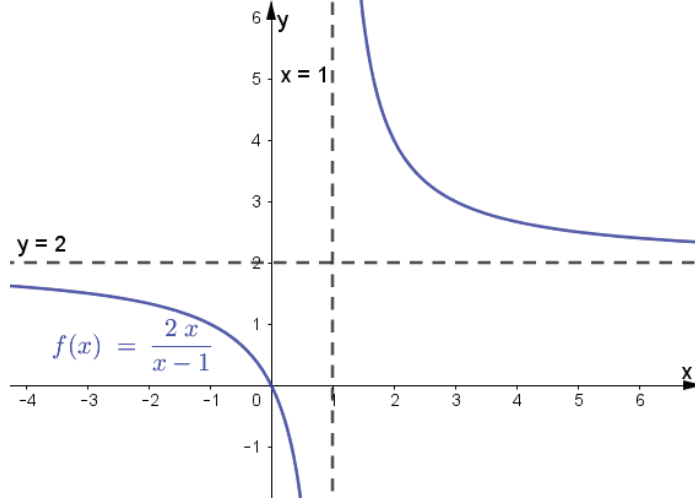
5.  $f(x) = \begin{cases} bx+1, & x < 2 \\ b-x, & x \geq 2 \end{cases}$  fonksiyonu veriliyor. Fonksiyonun tüm reel sayılar için sürekli olmasını sağlayacak  $b$  parametresinin değerini bulunuz.

6.  $f(x) = \begin{cases} 1-cx+dx^2, & x \leq -1 \\ x^2+x, & -1 < x < 2 \\ cx^2+dx+4, & x \geq 2 \end{cases}$  fonksiyonu veriliyor.  $f(x)$  fonksiyonunun  $(-\infty, \infty)$  aralığında sürekli olmasını sağlayacak  $c$  ve  $d$  parametrelerinin değerlerini bulunuz. Sonucu doğrulamak için GeoGebra'da grafiği çiziniz.

## 3. EĞRİ ASİMPOTLARI

Bir fonksiyonun limit değeri kavramıyla yakından ilişkili olan eğri asimptotları kavramıdır.

Örnek 1:  $f(x) = \frac{2x}{x-1}$  fonksiyonunun grafiği çizilmiştir. Grafiğin  $x = 1$  ve  $y = 2$  doğrularına yaklaşırkenki davranışı hakkında ne fark edebiliriz?



$x = 1$  doğrusu için çizimden aşağıdaki özellikleri fark edebiliriz:

$x$  değişkeni 1'den büyük değerler dizisiyle 1'e yaklaşırken, yani  $x_1 > x_2 > x_3 > \dots$ , ve karşılık gelen nokta dizisi  $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3), \dots$   $x = 1$  doğrusuna giderek daha fazla yaklaşırken, karşılık gelen fonksiyon değerleri dizisi  $y_1, y_2, y_3, \dots$  sınırsız bir şekilde artar, yani  $+\infty$ 'a yaklaşır. Bu nedenle,  $x$  değişkeni sağdan 1'e yaklaşırken fonksiyonun grafiği  $x = 1$  doğrusuna asla dokunmadan yaklaşır ve  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$  elde ederiz.  $x = 1$  doğrusunun solundaki eğrinin grafiği için de benzer bir durum elde edilir, yani  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$  elde edilir.

Bu özelliğe sahip  $x = 1$  doğrusuna, verilen fonksiyonun **dikey asimptotu** denir ( $y$ - eksenine paralel bir doğru olduğu için dikey asimptot olarak adlandırılır).

$y = 2$  doğrusu için çizimden aşağıdaki özellikleri fark edebiliriz:

$x$  değişkeni büyük değerler aldığında, yani  $x \rightarrow +\infty$ , fonksiyonun grafiği  $y = 2$  doğrusuna yukarıdan asla dokunmadan yaklaşır. Bu,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$  anlamına gelir. Benzer şekilde,  $x \rightarrow -\infty$  olduğunda da  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$  elde edilir.

$y = 2$  doğrusuna **yatay asimptot** denir. Doğru,  $x$  eksenine paraleldir.

Asimptot tanımını verelim:

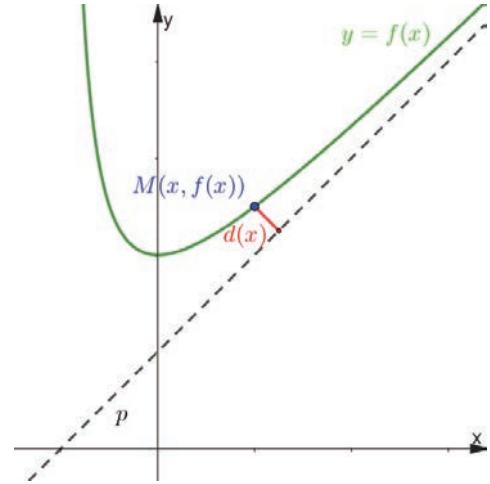
**Tanım 1.**  $y = f(x)$  fonksiyonunun grafiğinin, noktaları sonsuza doğru uzaklaşan bir “kolu” olsun. Fonksiyonun grafiğindeki değişken bir  $M(x, f(x))$  noktasının belirli bir  $p$  doğrusuna olan  $d(x)$  uzaklığı,  $M$  noktası koordinat başlangıcından sonsuza doğru uzaklaştığında sifıra yaklaşıyorsa, yani  $\lim_{x \rightarrow \infty} d(x) = 0$  ise,  $p$  doğrusuna  $y = f(x)$  eğrisinin **asimptotu** denir.

$p$  doğrusunun koordinat sistemindeki konumuna bağlı olarak, asimptot şu şekilde olabilir:

yatay -  $p$  doğrusu  $x$  eksenine paralel ise;

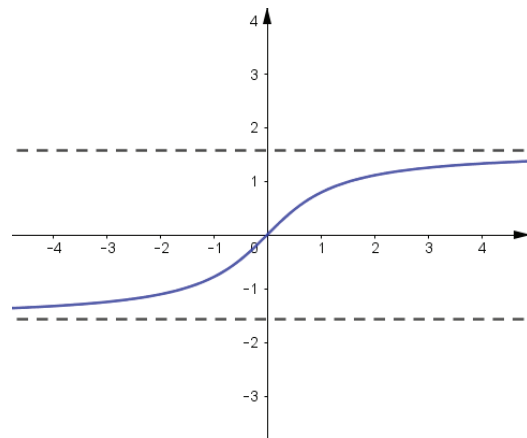
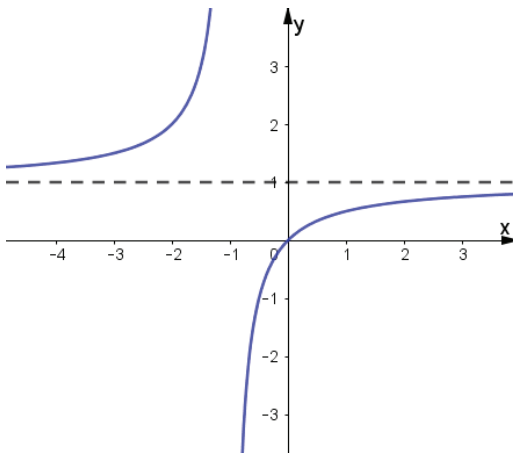
dikey -  $p$  doğrusu  $y$  eksenine paralel ise;

eğik -  $p$  doğrusu koordinat eksenlerinden herhangi birine paralel değilse



**Tanım 2.**  $D_f = (a, +\infty)$  (veya  $D_f = (-\infty, a)$ ) kümesinde tanımlı bir  $y = f(x)$  fonksiyonu verilmiş olsun.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$  (ya da  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ ) koşulu sağlanıyorsa,  $y = b$  doğrusu  $y = f(x)$  fonksiyonunun **yatay** asimptotudur.

Yatay asimptotla ilgili olarak fonksiyon grafiğinin bazı olası konumları:



Fonksiyon grafiğinin yatay asimptota yaklaşması, asimptotun üst veya alt tarafından olabilir.

$y = f(x)$  fonksiyonunun  $y = b$  yatay asimptotuna nereden yaklaştığını belirlemek için,  $x$  değişkenine bağlı olarak  $f(x) - b$  farkının işaretini araştırırız.

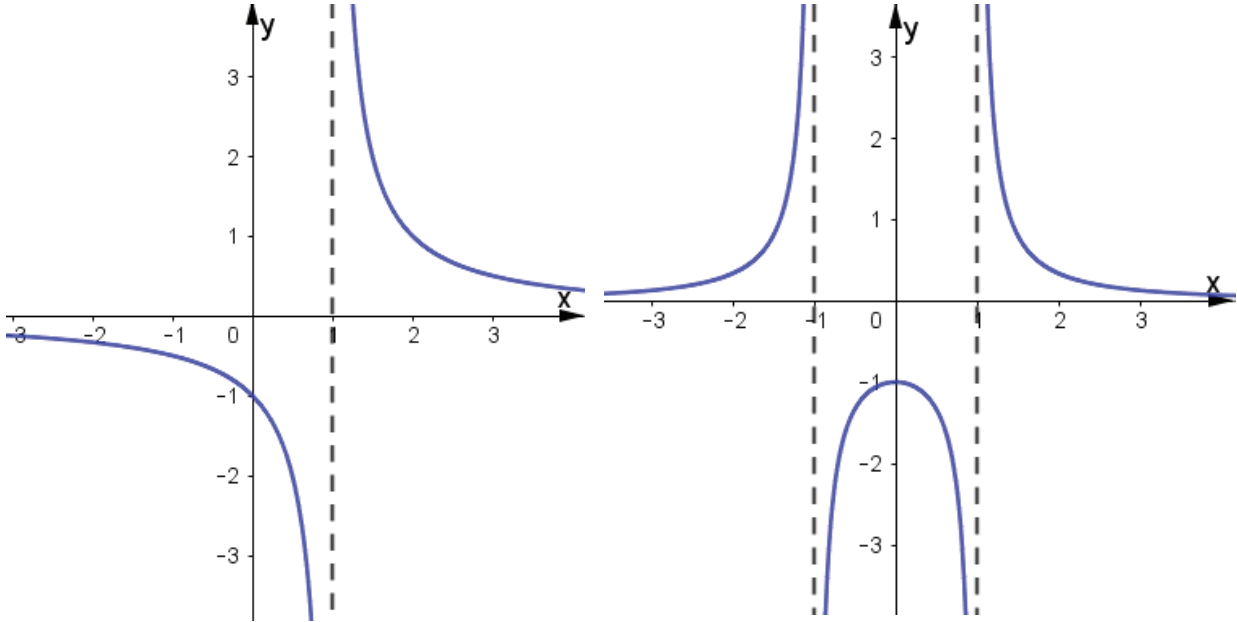


Eğer  $f(x) - b > 0$  ( $x \pm \infty$ 'a varırken), o zaman grafik yatay asimptotun üzerindedir.

Eğer  $f(x) - b < 0$  ( $x \pm \infty$ 'a varırken), o zaman grafik yatay asimptotun altındadır.

**Tanım 3.**  $a$  noktasının bir komşuluğunda ( $a$  noktası hariç) tanımlı bir  $y = f(x)$  fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$  veya  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm \infty$  koşullarından herhangi biri sağlanırsa,  $x = a$  doğrusu  $y = f(x)$  fonksiyonunun **dikey** asimptotudur.

Dikey asimptotla ilgili olarak fonksiyon grafiğinin bazı olası konumları:



Elde edilen  $+\infty$  veya  $-\infty$  sonuca bağlı olarak, fonksiyonun asimptota yaklaşımı belirlenir.

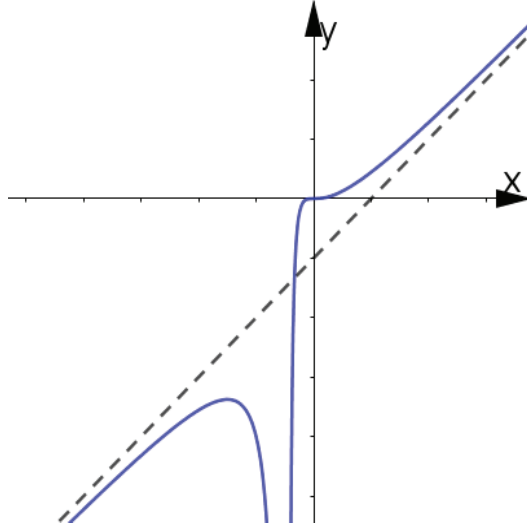
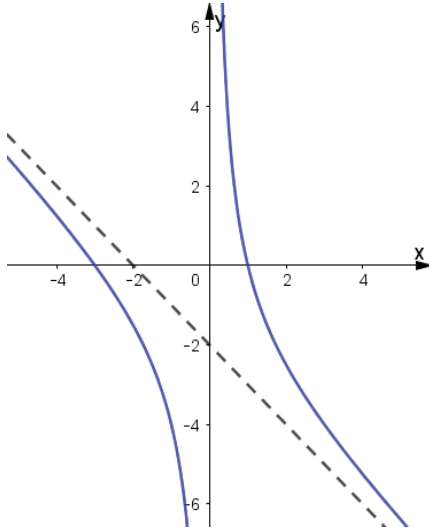
Eğer sonuç  $+\infty$  ise, fonksiyon asimptota yukarıdan yaklaşır,  $x \rightarrow a^+$  ise sağdan,  $x \rightarrow a^-$  ise soldan.

Eğer sonuç  $-\infty$  ise, fonksiyon asimptota aşağıdan yaklaşır,  $x \rightarrow a^+$  ise sağdan,  $x \rightarrow a^-$  ise soldan.

**Tanım 4.**  $y = kx + n$  doğrusu  $k \neq 0$ ,  $y = f(x)$  fonksiyonunun **eğik asimptotu** ise,  $k$  ve  $n$  sayıları şu formüllerle belirlenir:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ dhe } n = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - kx).$$

Eğik asimptotla ilgili olarak fonksiyon grafiğinin bazı olası konumları aşağıda gösterilmiştir:



Fonksiyon grafiğinin eğik asimptota yaklaşması, asimptotun üst veya alt tarafından olabilir.

$y = f(x)$  fonksiyonunun  $y = kx + n$  eğik asimptotuna nereden yaklaştığını belirlemek için,  $x$  değişkenine bağlı olarak  $f(x) - (kx + n)$  farkının işaretini belirleriz.

Eğer  $f(x) - (kx + n) > 0$  ( $x \pm \infty$ 'a varırken), o zaman grafik eğik asimptotun üzerindedir.

Eğer  $f(x) - (kx + n) < 0$  ( $x \pm \infty$ 'a varırken), o zaman grafik eğik asimptotun altındadır.

**Örnek 2:**  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$  fonksiyonunun asimptotlarını belirtelim.

**Çözüm:**  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ , yani fonksiyon  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$  aralıklarında tanımlıdır.

1)  $x = 1$  kritik değerdir ve fonksiyonun dikey asimptotu olabilir.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \text{değerini hesaplayalım.}$$

Sol limit değerini  $x = 1 - h$  değişimiyle bulacağız, burada  $h > 0$  ve  $h \rightarrow 0$ . Bu şekilde şunu elde ederiz:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-h+1}{1-h-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2-h}{-h} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \text{değerini hesaplayalım,}$$

Sağ limit değerini  $x = 1 + h$  değişimiyle bulacağız, burada  $h > 0$  ve  $h \rightarrow 0$ . Böylece şunu elde ederiz:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + h + 1}{1 + h - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 + h}{h} = +\infty$$

Çözüm olarak  $\pm\infty$  elde ettiğimiz için,  $x = -1$  doğrusu dikey asimptottur ve grafik sağ tarafta yukarıya doğru, soldan aşağıya doğru yaklaşır.

$$2) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{x \left( 1 - \frac{1}{x} \right)} = 1,$$

Çözüm olarak 1 elde ettiğimiz için,  $y = 1$  doğrusu yatay asimptottur.

Fonksiyonun grafiği yatay asimptota göre nasıl davranır?

Şu farkı hesaplıyoruz:

$$f(x) - y = \frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{x+1 - (x-1)}{x-1} = \frac{2}{x-1}$$

İşaretini  $x$  değişkenine göre belirliyoruz.

$\frac{2}{x-1} > 0$  olduğundan,  $x > 1$  için eğri asimptotun üst tarafındadır ve  $\frac{2}{x-1} < 0$  olduğundan,  $x < 1$  için eğri asimptotun alt tarafındadır.

$$3) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x+1}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{x^2 \left( 1 - \frac{1}{x} \right)} = 0,$$

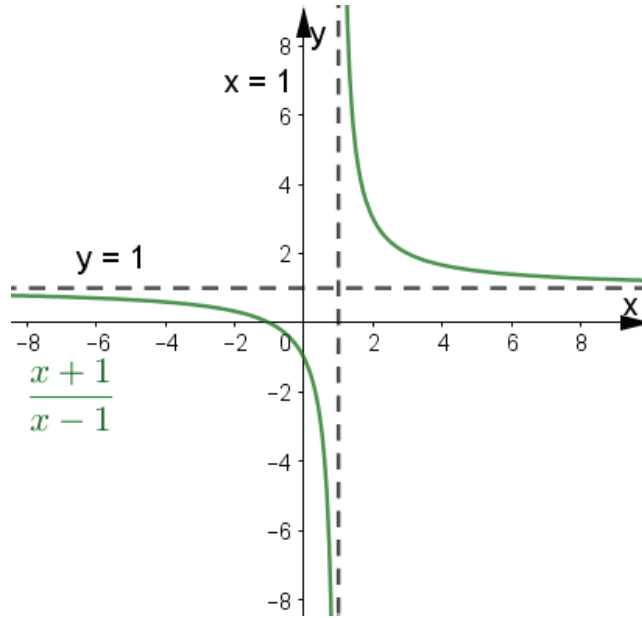
$k = 0$  olduğundan, fonksiyonun eğik asimptotu yoktur.

**Not:** Eğer  $k = 0$  veya  $k = \pm\infty$  veya  $n = \pm\infty$  ise, fonksiyonun eğik asimptotu yoktur.

Eğer  $k = 0$  ve  $n \neq \pm\infty$  ise,  $y = 0x + n$ , yani  $y = n$  yatay asimptotu elde edilir.

Fonksiyon grafiklerini doğru çizmek için, fonksiyonun asimptotlarını ve fonksiyon grafiğinin asimptotlara yaklaşımını belirlemek iyidir.

$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$  fonksiyonunun grafiksel olarak gösterilmiş asimptotları:



Örnek 3:  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1}$  fonksiyonunun asimptotlarını belirtelim.

**Çözüm:**  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  yani fonksiyon  $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$  aralıklarında tanımlıdır.

1) Fonksiyonun tanımlı olmadığı kritik değer  $x = -1$ 'dir, bu nedenle  $x = -1$  doğrusu dikey asimptot adayıdır. Kontrol ediyoruz:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1} =$$

(Sol limit değerini  $x = -1 - h$  değişimiyle bulacağız, burada  $h > 0$  ve  $h \rightarrow 0$ . Böylece şunu elde ederiz:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1-h)^2 + 2(-1-h) + 3}{-1-h+1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2+h^2}{-h} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1} =$$

(Sağ limit değerini  $x = -1 + h$  değişimiyle bulacağız, burada  $h > 0$  ve  $h \rightarrow 0$ . Böylece şunu elde ederiz:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h)^2 + 2(-1+h) + 3}{-1+h+1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2+h^2}{h} = +\infty$$

Bu nedenle,  $x = -1$  doğrusu dikey asimptottur ve grafik sağdan doğruya yukarıdan, soldan ise doğruya aşağıdan yaklaşır.

$$2) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left( 1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right)}{x \left( 1 + \frac{1}{x} \right)} = \pm\infty,$$

Fonksiyonun yatay asimptotu yoktur.

$$3) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left( 1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right)}{x^2 \left( 1 + \frac{1}{x} \right)} = 1,$$

Fonksiyonun  $k = 1$  katsayılı bir eğik asimptotu vardır.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x + 3 - x^2 - x}{x + 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \left( 1 + \frac{3}{x} \right)}{x \left( 1 + \frac{1}{x} \right)} = 1,$$

İkinci katsayısını da  $n = 1$  olarak bulduk.

Buna göre,  $y = x + 1$  doğrusunun eğik asimptot olduğunu elde ettik.

Fonksiyon grafiği eğik asimptota göre nasıl davranır?

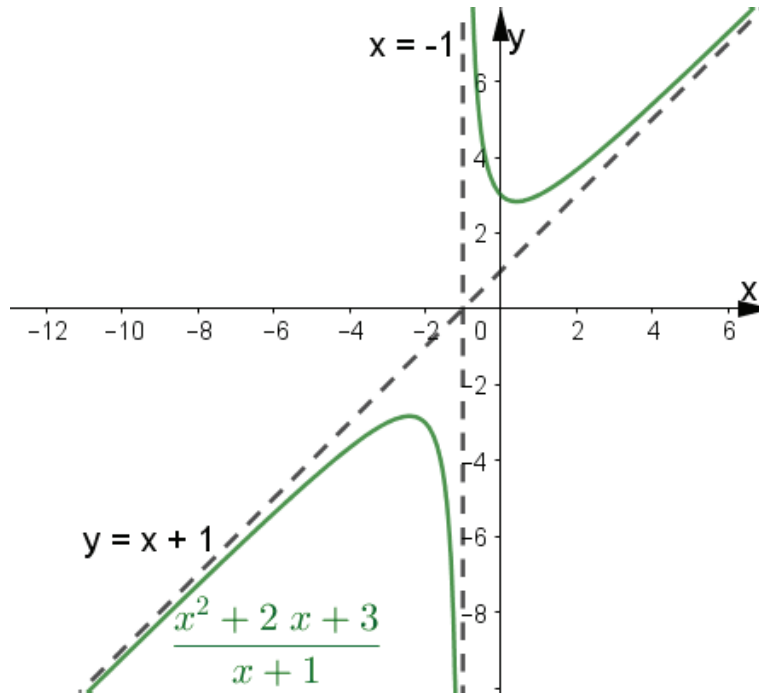
Şu farkı hesaplıyoruz:

$$f(x) - y = \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1} - (x + 1) = \frac{x^2 + 2x + 3 - (x + 1)^2}{x + 1} = \frac{2}{x + 1}$$

İşaretini  $x$  değişkenine göre belirliyoruz.

$\frac{2}{x + 1} > 0$  olduğundan,  $x > -1$  için eğri asimptotun üst tarafındadır ve  $\frac{2}{x + 1} < 0$  olduğundan,  $x < -1$  için eğri asimptotun alt tarafındadır.

Fonksiyonun asimptotlarının grafiksel gösterimi:



### Alıştırma Soruları:

**Sorular:** Aşağıdaki fonksiyonların asimptotlarını bulunuz:

1)  $f(x) = \frac{x+1}{x}$

2)  $f(x) = \frac{x-3}{x+4}$

3)  $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

4)  $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 1}{x - 2}$

5)  $f(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$

6)  $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 3x + 2}$

7)  $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x^2}$

8)  $f(x) = \frac{x^3}{4 - x^2}$

9)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

10)  $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2 + 2}}$

11)  $f(x) = \frac{x^3}{3(1+x^2)}$

12)  $f(x) = x \cdot e^{-x}$

13)  $f(x) = 2^{x+1} - 2$

14)  $f(x) = \frac{1}{1 + e^x}$

15)  $f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 4}$

#### 4. TEMEL FONKSİYONLARIN LİMİTLERİ. TEMEL FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİNİN ASİMPOTOTLARI

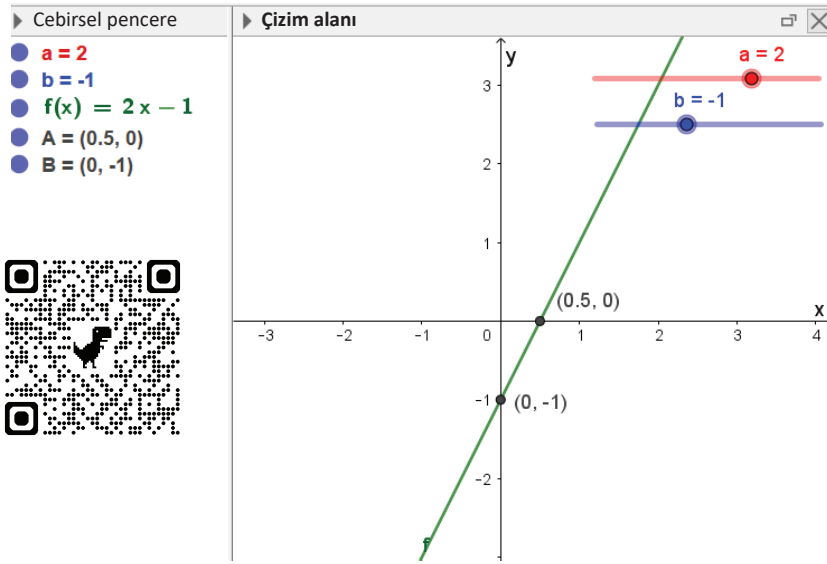
Önceki modüler ünite de temel fonksiyonları hatırladık. Bu bölümde, bazı temel fonksiyonların grafiklerini inceleyeceğiz ve limit değerlerini ve asimptotlarını belirteceğiz.

Öncelikle özel olan polinom fonksiyonlarını, doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonları inceleyeceğiz.

##### Doğrusal Fonksiyon

$f(x) = ax + b$  fonksiyonuna doğrusal fonksiyon denir. Tanım kümesi reel sayılar kümesidir, yani  $D_f = \mathbb{R}$  dir.

GeoGebra'daki verilen aplette,  $a$  ve  $b$  katsayılarının değerleri kaydırıcılar tarafından verilen doğrusal bir fonksiyon örneği verilmiştir.



<https://www.geogebra.org/m/d3uummybd>

Kaydırıcıların değerlerini hareket ettirelim ve gözlemleyelim. Doğrusal fonksiyon için ne geçerlidir?

Eğer  $a > 0$  ise,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + b) = +\infty$  ve  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax + b) = -\infty$ . Fonksiyonun asimptotu yoktur.

Eğer  $a < 0$  ise,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + b) = -\infty$  ve  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax + b) = +\infty$ . Fonksiyonun asimptotu yoktur.

**Örnek 1.** Verilen fonksiyonu

a)  $f(x) = 2x - 1$       b)  $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$

grafiksel olarak göster ve limit değerini ve asimptotlarını belirtiniz.

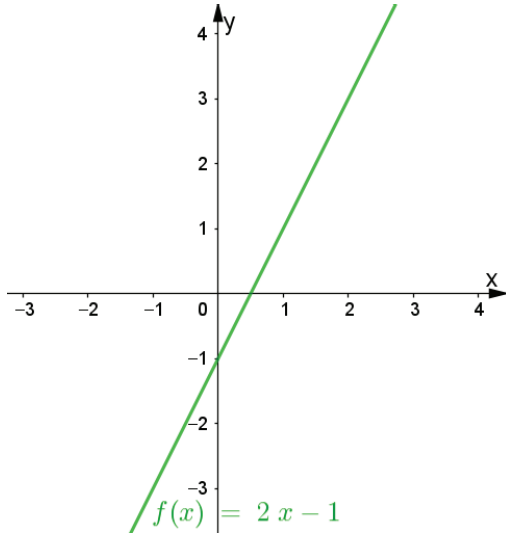
**Çözüm:**

a)  $f(x) = 2x - 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1) = -\infty$$

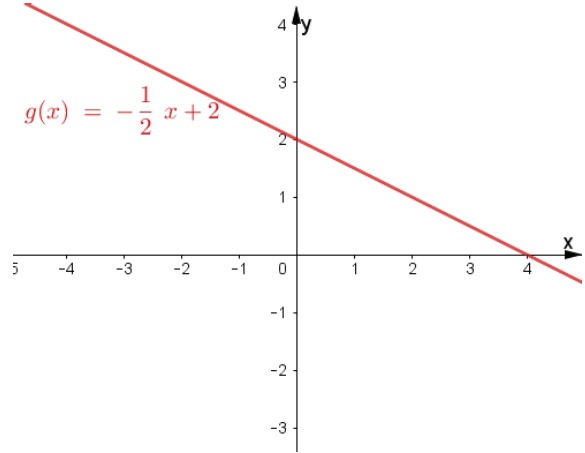
Funksionet nuk kanë asimptota.



b)  $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$

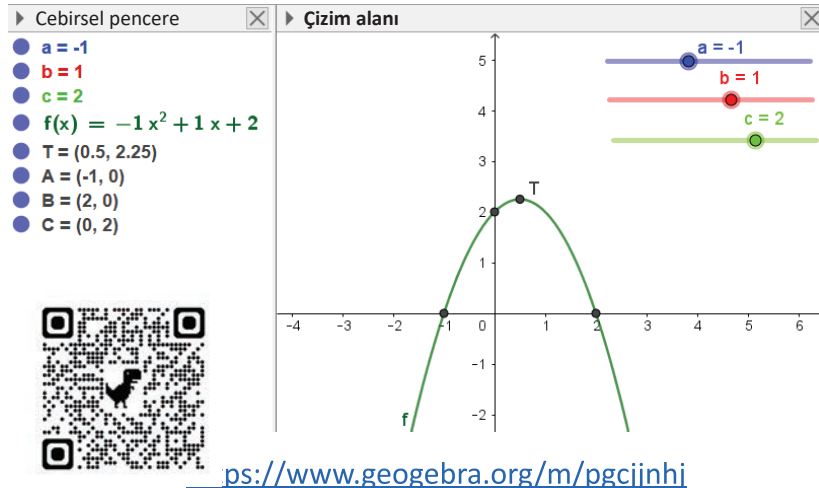
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{2}x + 2 \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{1}{2}x + 2 \right) = +\infty$$

**İkinci Dereceden Fonksiyon**

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$  fonksiyonuna ikinci dereceden fonksiyon denir. Tanım kümesi reel sayılar kümesidir, yani  $D_f = \mathbb{R}$  dir.

GeoGebra'daki verilen aplette,  $a$ ,  $b$  ve  $c$  katsayılarının değerleri kaydırıcılar tarafından verilen ikinci dereceden bir fonksiyon örneği verilmiştir.





Kaydırıcıların değerlerini hareket ettirelim ve gözlemleyelim. İkinci dereceden fonksiyon için ne geçerlidir?

Eğer  $a > 0$  ise,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^2 + bx + c) = +\infty$  ve  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^2 + bx + c) = +\infty$  Fonksiyonun asimptotu yoktur.

Eğer  $a < 0$  ise,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^2 + bx + c) = -\infty$  dhe  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^2 + bx + c) = -\infty$ . Fonksiyonun asimptotu yoktur.

**Örnek 2.** Verilen fonksiyonları

a)  $f(x) = x^2 + 2x - 1$

b)  $g(x) = -2x^2 - x + 3$

grafiksel olarak göstererek, sonsuzdaki noktalar için limit değerini ve olası asimptotları belirleyiniz.

**Çözüm:**

a)  $f(x) = x^2 + 2x - 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2x - 1) = +\infty$$

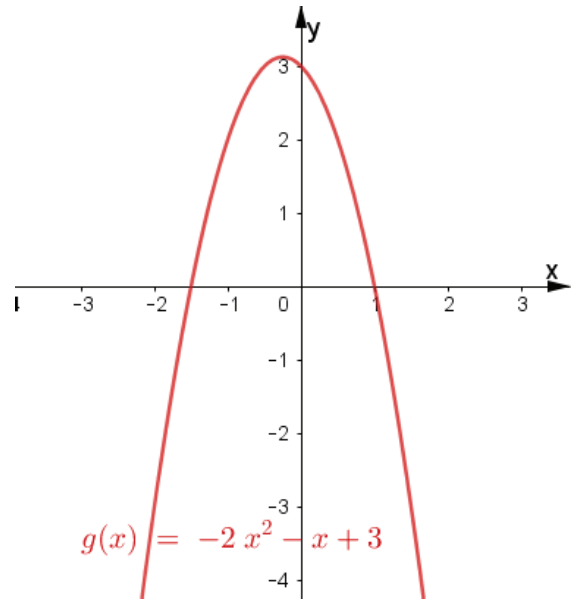
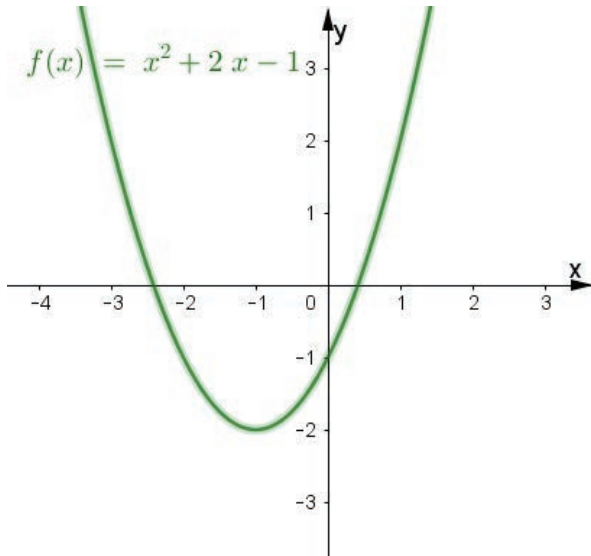
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 2x - 1) = +\infty$$

b)  $g(x) = -2x^2 - x + 3$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^2 - x + 3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 - x + 3) = -\infty$$

Fonksiyonların asimptotları yoktur.



**Üstel Fonksiyon**

Kuvvetleri -1 ve  $\frac{1}{2}$  olan üstel fonksiyonları inceleyeceğiz.

**Örnek 3.**  $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$  fonksiyonu, tam sayı üslü bir üstel fonksiyon olarak adlandırılır. Tanım kümesi  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 'dir.

Bazı özel değerler için limit değerlerini ve asimptotları belirtelim.

**Çözüm:**  $f(x) = \frac{1}{x}$  ve  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  fonksiyonunu ele alalım. Aşağıdaki limit değerlerini belirtelim:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

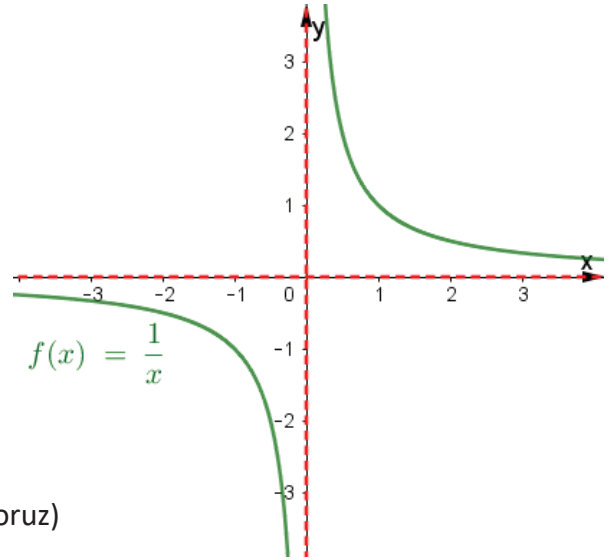
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{0-h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} = -\infty,$$

( $x = 0 - h$ ,  $h > 0$  ve  $h \rightarrow 0$  dönüşümünü uyguluyoruz)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{0+h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} = +\infty,$$

( $x = 0 + h$ ,  $h > 0$  ve  $h \rightarrow 0$  dönüşümünü uyguluyoruz)



İlk iki limit değerinden fonksiyonun yatay asimptotunun  $y = 0$  olduğu anlaşılır. Üçüncü ve dördüncü limit değerlerinden ise fonksiyonun dikey asimptotunun  $x = 0$  olduğu anlaşılır.

**Örnek 4.**  $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$  fonksiyonu, rasyonel sayı üslü bir üstel fonksiyon olarak adlandırılır. Tanım kümesi  $D_f = [0, +\infty)$ 'dir.

Bazı özel değerler için limit değerlerini ve asimptotlarını belirtelim.

**Çözüm:**  $f(x) = \sqrt{x}$  ve  $D_f = [0, +\infty)$  fonksiyonunu ele alalım. Aşağıdaki limit değerlerini belirleyelim:

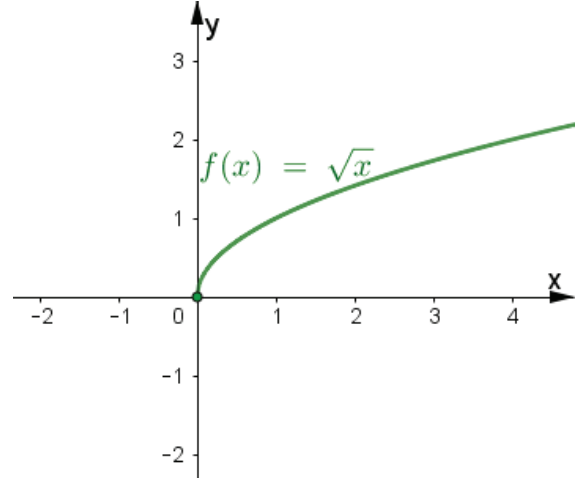
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  tanımlanamaz.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{0+h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{h} = 0,$$

(dönüşümünü uyguluyoruz,  
 $x = 0 + h$ ,  $h > 0$  ve  $h \rightarrow 0$ )

Fonksiyonun asimptotu yoktur.



### Üstel Fonksiyon

$f(x) = a^x$  fonksiyonuna,  $a \neq 1$ ,  $a > 0$  için, üstel fonksiyon denir. Tanım kümesi  $D_f = R$ 'dir.

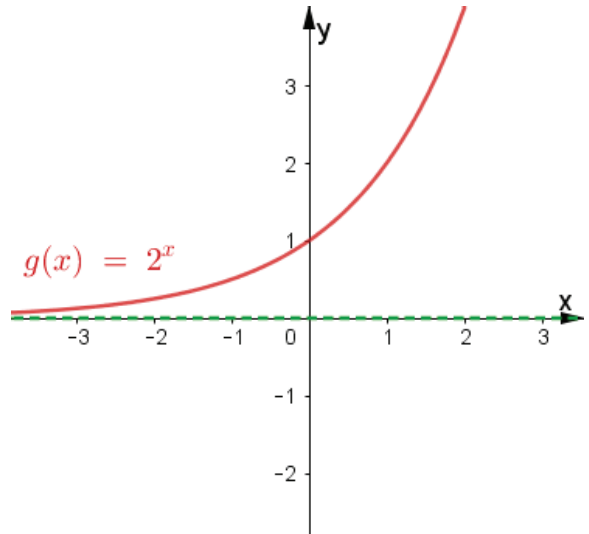
**Örnek 5.**  $f(x) = 2^x$  fonksiyonu üstel bir fonksiyondur. Tanım kümesi  $D_f = R$ 'dir.

Bazı özel değerler için limit değerlerini ve asimptotlarını belirtelim.

**Çözüm:**  $f(x) = 2^x$  ve  $D_f = R$  fonksiyonunu ele alalım. Aşağıdaki limit değerlerini belirtelim:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0$$



Fonksiyonun sadece  $x \rightarrow -\infty$  olduğunda, yatay asimptotu  $y = 0$ 'dır.

**Logaritmik Fonksiyon**

$y = \log_a x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  fonksiyonuna logaritmik fonksiyon denir. Fonksiyonun tanım kümesi  $D_f = (0, +\infty)$ 'dir.

**Örnek 6.**  $g(x) = \lg x$  fonksiyonu, 10 tabanlı özel bir logaritmik fonksiyondur. Tanım kümesi  $D_g = (0, +\infty)$ 'dir.

Bazı özel değerler için, limit değerlerini ve asimptotlarını belirtelim.

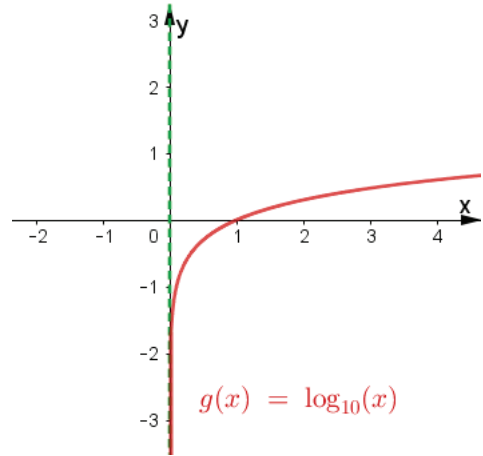
**Çözüm:**  $g(x) = \lg x$  ve  $D_g = (0, +\infty)$  fonksiyonunu ele alalım. Aşağıdaki limit değerlerini belirtelim:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \lg x = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  tanımlanamaz.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \lg x = \lim_{h \rightarrow 0} \lg(0+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \lg(h) = -\infty$$

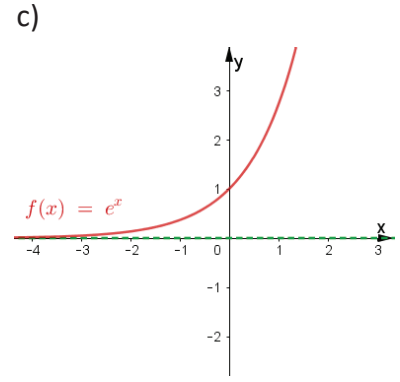
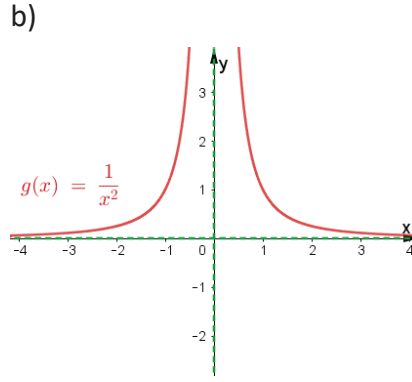
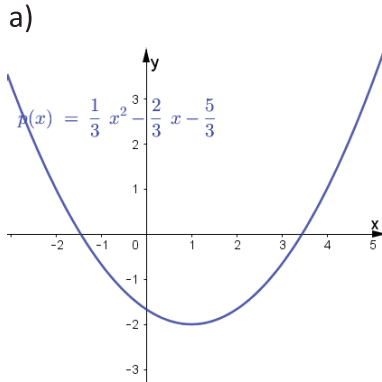
( $x = 0+h$  dönüşümünü uyguluyoruz,  
 $h > 0$  ve  $h \rightarrow 0$ )



Fonksiyonun ancak sadece doğrunun sağ tarafından dikey asimptotu  $x = 0$ 'dır.

**Alıştırma Soruları:**

1. Grafikleriyle verilen fonksiyonların asimptotlarını belirtiniz.



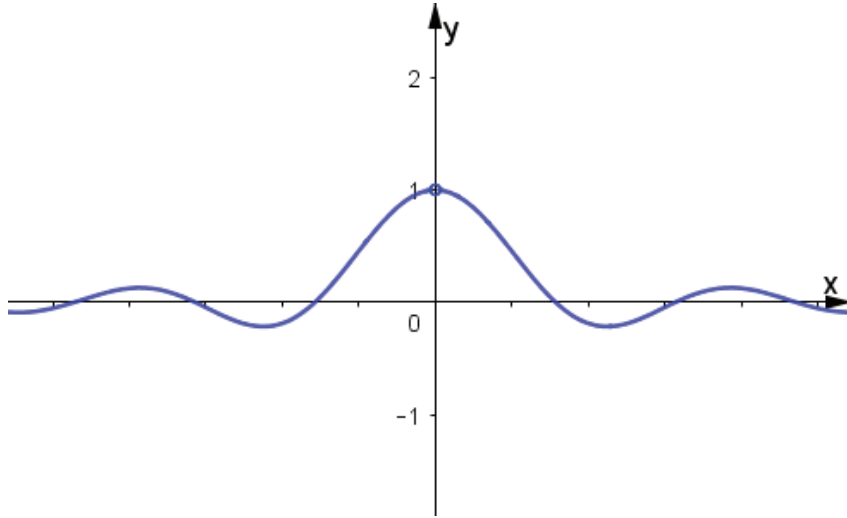
2. Aşağıdaki fonksiyonların asimptotlarını belirtiniz:

- a)  $f(x) = -3x + \frac{1}{4}$    b)  $f(x) = 4x + 5$    c)  $f(x) = x^2 - 5x + 6$    ç)  $f(x) = -x^2 + 3x$    dh)  $f(x) = \frac{1}{x^3}$   
e)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$    f)  $f(x) = \ln x$    g)  $f(x) = -\lg x$    i)  $f(x) = e^{-x}$    h)  $f(x) = 3^x$

## 5. ÖZEL LİMİT DEĞERLERİ

Bu modüler ünite, diğer fonksiyonların limit değerlerini hesaplarken kullanacağımız bazı fonksiyonların limit değerlerini belirleyeceğiz.

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$  fonksiyonunu ele alalım. Tanım kümesi  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  'dır, yani fonksiyon sadece  $x = 0$  için tanımlı değildir. Fonksiyonun grafiksel gösterimi şöyledir:



Değişkenin değerleri pozitif sayılar dizisi üzerinden 0'a yaklaşırsa fonksiyonun aldığı değerlerin neler olduğunu belirleyelim. Bunu tablo halinde gösterelim:

|        |         |         |         |         |         |         |     |
|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-----|
| $x$    | 1       | 0.1     | 0.01    | 0.001   | 0.0001  | 0.00001 | ... |
| $f(x)$ | 0.84147 | 0.99833 | 0.99998 | 0.99999 | 0.99999 | 0.99999 | ... |

Değişkenin değerleri 0'a yaklaştığında, fonksiyonun değerlerinin 1'e yaklaştığını gördük.

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$  fonksiyonu çift bir fonksiyon olduğundan, değişkenin değerleri soldan 0'a yaklaştığında da fonksiyonun değerinin 1'e yaklaştığı sonucuna varabiliriz.

$x_n \neq 0$  ve  $n \in \mathbb{N}$  olan ve 0'a yakınsayan herhangi bir  $(x_n)$  dizisi için, karşılık gelen  $\left(\frac{\sin(x_n)}{x}\right)$  dizisinin 1'e yakınsadığı kanıtlanmıştır.

O halde, limit değerini şu şekilde yazabiliriz:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Örnek 1. Verilen limitlerin değerini belirtelim:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$

**Çözüm:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} \cdot \frac{4}{4} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 4 \cdot 1 = 4$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

**Çözüm:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{x}}{\frac{\sin 3x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{x} \cdot \frac{2}{2}}{\frac{\sin 3x}{x} \cdot \frac{3}{3}} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{3}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 5x}{\sin x}$

**Çözüm:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 5x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{\sin x} - \frac{5x}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - 5 \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} \right) =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 1 - 5 \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = 1 - 5 \cdot \frac{1}{1} = 1 - 5 = -4.$$

Örnek 2. Verilen limitlerin değerlerini belirtiniz:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

**Çözüm:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$$

**Çözüm:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 = 2 \cdot 1^2 = 2$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin x}$$

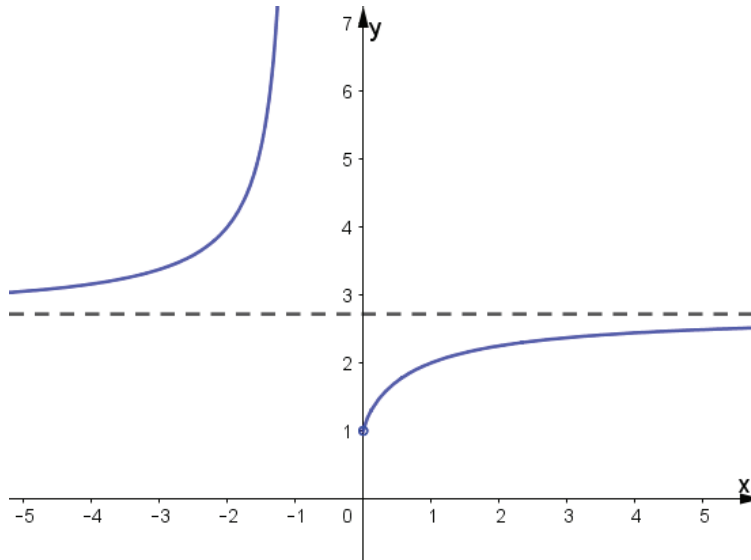
**Çözüm:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{\cos 5x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\cos 5x \cdot \sin x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{x} \cdot \frac{x}{\cos 5x \cdot \sin x}}{\frac{x}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{x} \cdot \frac{x}{5} \cdot \frac{5}{\sin x}}{\frac{x}{\sin x}} = 5 \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos 5x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = 5 \cdot \frac{1}{1 \cdot 1} = 5$$

**Not:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$  limit değeri de geçerlidir, çünkü

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  fonksiyonunu ele alalım. Fonksiyonun grafiksel gösterimi şöyledir:



$x$  sonsuza varırken bu fonksiyonun bir limiti olup olmadığını merak ediyoruz. Değişken değerleri sınırsız büyüyen doğal sayılar dizisi ise fonksiyonun aldığı değerlerin neler olduğunu belirleyelim.

|        |   |        |        |        |        |        |     |
|--------|---|--------|--------|--------|--------|--------|-----|
| $x$    | 1 | 10     | 100    | 1000   | 10000  | 100000 | ... |
| $f(x)$ | 2 | 2.5937 | 2.7048 | 2.7169 | 2.7181 | 2.7183 | ... |

Değişkenin değerleri sonsuza yaklaştıkça, fonksiyonun değerlerinin  $e$ 'ye yaklaştığını gördük.

$x_n \neq 0$  ve  $n \in \mathbb{N}$  olan ve sonsuza yakınsayan herhangi bir  $(x_n)$  dizisi için, karşılık gelen  $\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n}$  dizisinin  $e$ 'ye yakınsadığı kanıtlanmıştır.

O halde, limit değerini şu şekilde yazarız:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

**Not:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$  formülünde  $\frac{1}{x} = t$  koyarsak,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$  'dan,  $t \rightarrow 0$  elde ederiz ve formülü

$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$  olarak yazabiliriz. Şimdi,  $x$  değişkenini tekrar değiştirirsek,  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$  formülünü elde ederiz.

**Örnek 3.** Verilen limit değerlerini belirtelim:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x}$

**Çözüm:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} = e$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4x+1}\right)^{2x-2}$

**Çözüm:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4x+1}\right)^{2x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4x+1}\right)^{(4x+1) \cdot \frac{1}{4x+1} (2x-2)} =$

$$= \left[ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4x+1}\right)^{4x+1} \right]^{\frac{2x-2}{4x+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-2}{4x+1}} = e^{\frac{1}{2}}$$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-3}\right)^x$



$t \rightarrow 0$  olur. İfadeye yerine koyarsak:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\frac{\ln(1+t)}{\ln a}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{t} \ln(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \frac{\ln a}{\ln e} = \frac{\ln a}{1} = \ln a$$

### Alıştırma Problemleri:

1. Aşağıdaki limitleri belirtiniz:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 7x}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 2x}$

2. Aşağıdaki limitleri belirtiniz:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{1 - \cos x}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} ax \cdot \operatorname{ctg} bx)$

3. Aşağıdaki limitleri belirtiniz:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x-1}$       b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-3x+2}$

4. Aşağıdaki limitleri belirtiniz:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{3x}\right)^{x+2}$       b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$

**TEKRAR VE PRATİK UYGULAMA İÇİN PROBLEMLER:**

1. Aşağıdaki limit değerlerini bulun:

a)  $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - 5x + 7)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x-7}{3x+2}$

2. Fonksiyonun sol ve sağ limitlerini bulun:

a)  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$  nê  $x_0 = 1$

b)  $f(x) = \frac{x+4}{x+3}$  nê  $x_0 = -3$

3. Aşağıdaki limit değerlerini ( $\frac{0}{0}$  türünde) bulun:

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x - 9}$

ç)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{2x^2 + 4x - 16}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{1 - \sqrt{x-1}}$

g)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x^2 + x}$

ğ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$

4. Aşağıdaki limit değerlerini ( $\infty - \infty$  türünde) bulun:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{4x^2}{x^2 - 1} - \frac{2}{x-1} \right)$

b)  $\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{1}{x+2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right)$

c)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \left( \frac{4x+3}{3x-1} - \frac{12x^2+7x+5}{9x^2-1} \right)$

5. Aşağıdaki limit değerlerini ( $\frac{\infty}{\infty}$  türünde) bulun:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 7x + 4}{3x^3 + 3x^2 - x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+2x-x^3}{x^3+9}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3-3x+2}}{\sqrt{x^2+4x-1}}$

6. Özel limit değerlerini kullanarak fonksiyonların limit değerlerini bulun:

|                                               |                                               |                                                                    |                                                  |
|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$ | $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ |
|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{3x^2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 4x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 5x}$

$$ç) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\lg 2x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{x+2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{2x+4}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$$

$$ğ) \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}$$

7. Fonksiyonların sürekliliğini ispatlayınız:

$$a) f(x) = \frac{1}{x^2+5} \text{ nê } x = 3$$

$$b) f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-3x+2} \text{ tanım kümesinde,}$$

$$c) f(x) = \frac{2x-1}{x^2-4} \text{ tanım kümesinde.}$$

8. Fonksiyonun süreksizlik (kesikli olduğu) noktalarını bulunuz:

$$f(x) = \frac{1}{x^2-x-6}$$

a) Fonksiyon hangi noktalarda süreksizdir?

b) Süreklilik aralıklarını bulunuz.

c) Fonksiyonun süreksiz olduğu noktalarda soldan ve sağdan değerlerinin değişimini inceleyiniz.

d) Fonksiyonun grafiğı kaç kısımdan oluşur?

Problemi çözmeyi kolaylaştırmak için önce GeoGebra’da grafiğı çizebilirsiniz.

9. Aşağıdaki fonksiyonların asimptotlarını bulunuz:

$$a) f(x) = \frac{3x}{x+1}$$

$$b) f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$$

$$c) f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2}$$

$$ç) f(x) = \frac{2x-x^3}{x^2+4}$$

10. Postanede 4 kilogram ağırlığa kadar paketler kabul edilmektedir. Paket ücreti aşağıdaki tabloya göre hesaplanır:

| $m$ kilogram olarak kütle | Denar cinsinden posta ücreti |
|---------------------------|------------------------------|
| $0 < m < 1$               | 100                          |
| $1 \leq m < 2$            | 120                          |
| $2 \leq m < 3$            | 140                          |
| $3 \leq m < 4$            | 180                          |

Bu şekilde, verilen posta ücreti ağırlığın bir fonksiyonudur.

Fonksiyonu  $f$  ile gösterelim, yani  $P = f(m)$ .

a)  $f(0,75)$ ,  $f(1)$  ve  $f(3,5)$  değerlerini bulunuz.

b)  $f(5)$ 'i bulunuz.

c) Fonksiyonun tanım kümesi nedir?

d) Fonksiyonun grafiğini çiziniz.

e) Fonksiyonun süreksizlik noktaları var mıdır?

$$11. f(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ x+2, & x \geq 0 \end{cases} \text{ fonksiyonunun sürekliliğini inceleyiniz.}$$

Fonksiyonun grafiğini çizin.

$$12. f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ x+1, & 1 < x \leq 4 \end{cases} \text{ fonksiyonunun sürekliliğini inceleyiniz.}$$

Fonksiyonun grafiğini çiziniz.

$$13. f(x) = \begin{cases} ax^2+1, & x > 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases} \text{ fonksiyonunun sürekli olması için gerçek bir } a \text{ sayısı bulunabilir mi?}$$

$$14. f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases} \text{ fonksiyonu veriliyor. Fonksiyonun tüm reel sayılar için sürekli olması için}$$

$a$  parametresinin değerini bulunuz.

$$15. f(x) = \begin{cases} 3x - \sqrt{x^2 - 4}, & |x| \geq 2 \\ ax, & |x| < 2 \end{cases} \text{ fonksiyonu veriliyor.}$$

Fonksiyonun tüm reel sayılar için sürekli olması için  $a$  parametresinin değerini bulunuz.

Sonucunuzu doğrulamak için GeoGebra'da grafiği çizin.

## MODÜLER BİRİM 4

### FONKSİYONUN TÜREVİ

Bu modülde şunları öğreneceksiniz:

Bir noktada fonksiyonun türevinin tanımı

Türevin geometrik yorumu

Tanıma göre türevin belirlenmesi

Temel elementer fonksiyonların tablo türevleri

Toplam, fark, çarpım ve bölümün türevi

Bileşik fonksiyon kavramı

Bileşik fonksiyonun türevi

Logaritmik türev

Teğet ve normalin denkleminin belirtilmesinde türevlerin uygulanması

Fizikte türevin uygulanması

Fonksiyonun değişimi ve grafiğini incelemek için türevin uygulanması

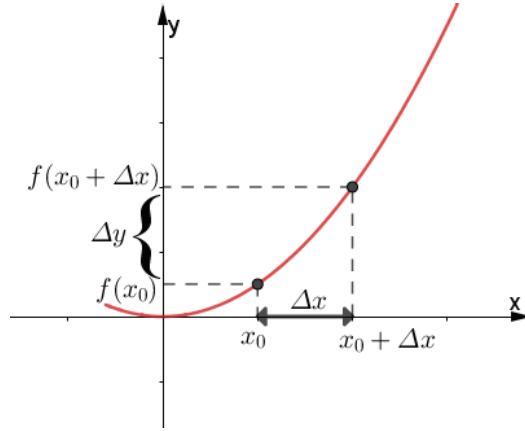
Ekstremum problemlerini çözmek için türevin uygulanması.

## FONKSİYONUN TÜREVİ

### 1. BİR NOKTADA FONKSİYONUN TÜREVİNİN TANIMI

$y = f(x)$  fonksiyonunun  $D_f$  üzerinde tanımlı olduğunu ve  $x_0 \in D_f$  olduğunu varsayalım. Değişken  $x_0$ 'da verilen bir  $\Delta x$  değişimi için,  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  farkını oluştururuz ve buna  $y = f(x)$  fonksiyonunun artışı diyoruz.

Aşağıdaki çizimde, değişken  $\Delta x$ 'in artışı ve fonksiyon  $\Delta y$ 'nin artışı grafiksel olarak gösterilmiştir.



**Örnek 1.**  $f(x) = 2x^2$  fonksiyonunun  $x_0 = 1$  noktasındaki artışını,  $\Delta x = 0,2$  için belirtiniz.

**Çözüm:**  $\Delta x = 0,2$  ve  $x_0 = 1$ 'den şunu hesaplayabiliriz:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1 + 0,2) - f(1) = 2 \cdot 1,2^2 - 2 \cdot 1^2 = 0,88$$

**Tanım:** Değişkenin artışı 0'a yaklaşırken, fonksiyonun artışı ve değişkenin artış oranının limit değeri varsa, yani  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  varsa, bu değere  $x = 0$  noktasında  $y = f(x)$  fonksiyonunun **türevi** denir ve  $y'$  veya  $f'(x_0)$  ile gösterilir.

**Gösterimi:**  $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ .

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$  oranı,  $x_0$  değişkeni  $\Delta x$  kadar değiştiğinde  $y = f(x)$  fonksiyonunun **ortalama değişim hızı**nı temsil eder.

Fonksiyonun  $f'(x)$  türevini bulma işlemine,  $f(x)$  fonksiyonunun **türevinin alması** denir.

**Not:** Fizikte türev, yol  $y = f(x)$  fonksiyonunun,  $x_0$  zamanına (noktaya) göre değişiminin anlık hızını temsil eder.

Daha basit bir gösterim için, apsisi  $x_0$  olan rastgele bir noktayı ilerde sadece  $x$  ile gösterelim.

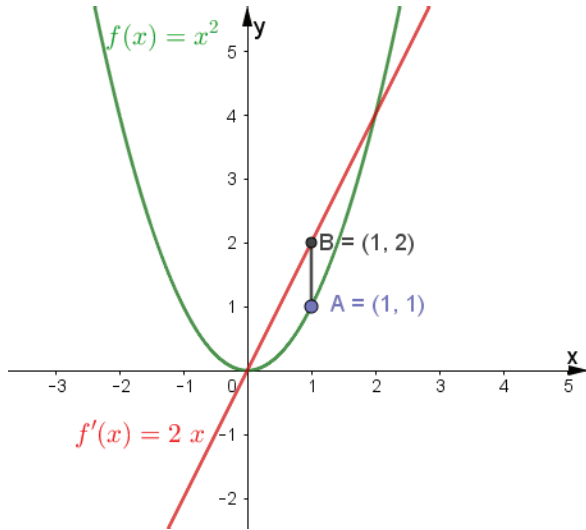
**Örnek 2.**  $f(x) = x^2$  fonksiyonunun türevini rastgele bir  $x$  noktasında tanıma göre bulunuz ve ardından apsisi  $x = 1$  olan bir noktada türevi belirtiniz.

**Çözüm:** Türevin tanımından şu sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cancel{\Delta x}(2x + \Delta x) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x + 0 = 2x, \\ f'(x) &= (x^2)' = 2x. \end{aligned}$$

$x = 1$  için,  $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$  elde ederiz.

Fonksiyonların grafiksel gösterimi:



$f(x) = x^2$  fonksiyonunun grafiği yeşil renktedir.

$f'(x) = 2x$  fonksiyonunun türevi kırmızı renktedir.

$x = 1$  için  $f'(1) = 2$  elde ederiz.  $B(1, 2)$  noktası, fonksiyonun  $A(1, 1)$  noktasından çizilen dikmeye aittir.

$y(B)$ , apsisi  $x(A)$  olan noktadaki birinci türevin değeridir.

Türev fonksiyonuna ait noktalar, grafiksel şekilde neyi temsil ediyorlar?

Aşağıda daha detaylı inceleyeceğiz.

**Örnek 3.**  $f(x) = 2x^2$  fonksiyonunun türevini rastgele bir  $x$  noktasında tanıma göre bulunuz ve ardından apsisi  $x = 1$  olan bir noktada türevini belirtiniz..

**Çözüm:** Türevin tanımından şu sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x)^2 - 2x^2}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 2x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4x\Delta x + 2(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(4x + 2\Delta x)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x}(4x + 2\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4x + 2\Delta x) = 4x + 0 = 4x, \\
 f'(x) &= (2x^2)' = 4x.
 \end{aligned}$$

$x = 1$  için  $f'(1) = 4 \cdot 1 = 4$  elde ederiz.

**Örnek 4.**  $f(x) = x^4$  fonksiyonunun türevini rastgele bir  $x$  noktasında tanıma göre bulunuz ve ardından apsisi  $x = -1$  olan bir noktada türevini belirtiniz.

**Çözüm:** Türevin tanımına göre şu sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^4 - x^4}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 4x^3\Delta x + 6x^2(\Delta x)^2 + 4x(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4 - x^4}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4x^3\Delta x + 6x^2(\Delta x)^2 + 4x(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(4x^3 + 6x^2\Delta x + 4x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x}(4x^3 + 6x^2\Delta x + 4x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3)}{\cancel{\Delta x}} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4x^3 + 6x^2\Delta x + 4x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3) = 4x^3 + 0 + 0 + 0 = 4x^3, \\
 f'(x) &= (x^4)' = 4x^3.
 \end{aligned}$$

$x = -1$  için  $f'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 = 4 \cdot (-1) = -4$  elde ederiz.



**Örnek 5.**  $f(x) = \sqrt{x}$  fonksiyonunun türevini rastgele bir  $x$  noktasında tanıma göre bulunuz ve ardından apsisi  $x = 4$  olan bir noktada türevini belirtiniz.

**Çözüm:** Türevin tanımına göre şu sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x})^2 - (\sqrt{x})^2}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x + 0} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 f'(x) &= (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.
 \end{aligned}$$

$$x = 4 \text{ için, } f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4} \text{ elde ederiz.}$$

**Örnek 6.**  $f(x) = \frac{1}{x}$  fonksiyonunun türevini rastgele bir  $x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  noktasında tanıma göre bulunuz ve ardından apsisi  $x = 2$  olan bir noktada türevini belirtiniz.

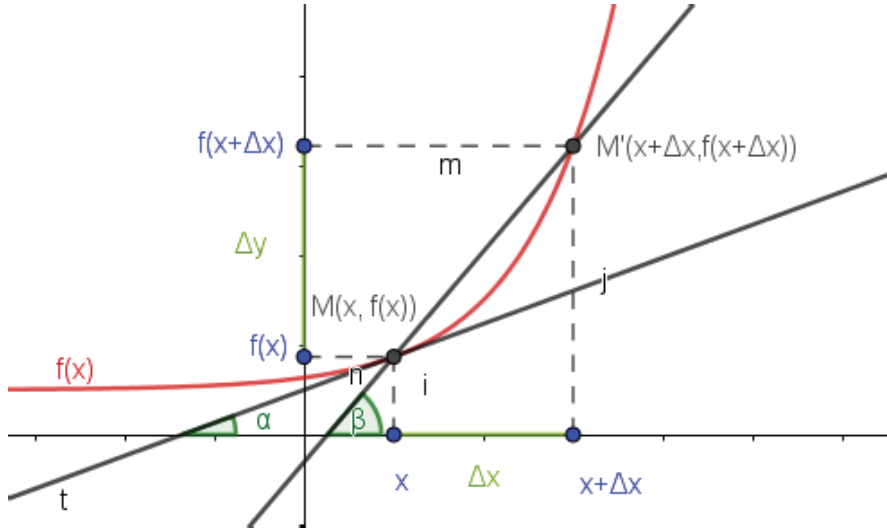
**Çözüm:** Türevin tanımına göre şu sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{x - x - \Delta x}{(x + \Delta x)x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x (x + \Delta x)x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} (x + \Delta x)x} = \\
 &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(x + \Delta x)x} = - \frac{1}{(x + 0)x} = - \frac{1}{x^2}. \\
 f'(x) &= \left( \frac{1}{x} \right)' = - \frac{1}{x^2}.
 \end{aligned}$$

$$x = 2 \text{ için, } f'(2) = - \frac{1}{2^2} = - \frac{1}{4} \text{ elde ederiz.}$$

### Türevin geometrik anlamı

Grafiğiyle beraber  $y = f(x)$  fonksiyonu verilmiştir.  $M(x, y) = M(x, f(x))$  fonksiyonun bir noktası olsun.  $M'(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$  koordinatlarına sahip eğri üzerinde bir  $M'$  noktasını alalım.



$\beta$  açısı,  $M$  ve  $M'$  noktalarından geçen doğrunun (kesenin)  $x$ - eksenini ile yaptığı açıdır,  $\alpha$  açısı ise, eğriye  $M$  noktasındaki teğetin  $x$ - eksenini ile yaptığı açıdır.

$\tan \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$  (hipotenüsü  $\overline{MM'}$  ve  $M$  köşesinde  $\beta$  açısı olan dik üçgenden) limit değeri elde edilir:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \tan \beta = \tan \alpha, \text{ yani}$$

$y = f(x)$  fonksiyonunun **türevi**, fonksiyonun grafiğinin  $M$  noktasındaki  $t$  teğetinin eğimidir.

$x$  noktasında belli bir türevi olan  $y = f(x)$  fonksiyonu için,  $x$  noktasında **türevlenebilir** olduğunu söyleriz. Fonksiyon  $x \in (a, b)$  aralığındaki her  $x$  noktasında türevlenebilir ise, fonksiyon  $(a, b)$  aralığında **türevlenebilir** olduğunu söyleriz.

### Alıştırma Problemleri:

1. Aşağıdaki problemlerde argümanın artışı  $\Delta x$  ise,  $y = f(x)$  fonksiyonunun  $x$  noktalarındaki artışını belirleyin:

a)  $f(x) = x$ ,  $x = 2$  ve  $\Delta x = 0.5$

b)  $f(x) = x^3$ ,  $x = 3$  ve  $\Delta x = 0.1$

c)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $x = 1$  ve  $\Delta x = 0.01$

ç)  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ,  $x = 1$  ve  $\Delta x = 0.2$

2. Fonksiyonun türevinin tanımını kullanarak, fonksiyonların türevlerini herhangi bir  $x \in D_f$  noktasında ve ardından apsisi  $x$  olan verilen noktada bulunuz.

a)  $f(x) = 2x + 3$ ,  $x = -2$

b)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$   $x = 1$

c)  $f(x) = \sqrt{x+1}$   $x = 3$

ç)  $f(x) = x^3$   $x = -1$

3. Fonksiyonun türevinin tanımını kullanarak, aşağıdaki fonksiyonların türevlerini herhangi bir  $x \in D_f$  için bulunuz.

a)  $f(x) = 5x + 1$ ,

b)  $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ ,

c)  $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ ,

ç)  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ .

4. Fonksiyonun türevinin tanımını kullanarak, fonksiyonların türevlerini rastgele herhangi bir  $x \in D_f$  noktasında ve ardından apsisi  $x$  olan verilen noktada bulunuz.

a)  $f(x) = 2^x$   $x = 0$

b)  $f(x) = \ln x$   $x = e$

c)  $f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$   $x = 3$

ç)  $f(x) = \frac{2}{1-x^2}$   $x = 0$

5. Aşağıdaki fonksiyonların verilen noktalarda belirli türevlerinin olmadığını gösteriniz:

a)  $f(x) = \sqrt[3]{x-3}$   $x = 3$

b)  $f(x) = \sqrt[3]{8-x^3}$   $x = 2$

c)  $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$   $x = 0$

ç)  $f(x) = \sqrt{x+1}$   $x = -1$

## 2. ELEMENTER FONKSİYONLARIN TÜREVİNİN BELİRTİLMESİ

Aşağıda bazı elementer fonksiyonların türevlerini belirteceğiz ve ardından bazı türev alma kurallarını çıkaracağız. Bunları daha bileşik fonksiyonların türevlerini hesaplamak için kullanacağız.

**Örnek 1.** Sabit fonksiyonunun türevini belirtelim;  $f(x) = C$ ,  $C = \text{const.}$

**Çözüm:** Türevin tanımından şu sonuç elde edilir:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Her  $(C)' = 0$  sabiti için,  $C \in \mathbb{R}$  elde ettik.

**Örnek 2.**  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ve  $x \in \mathbb{R}$  kuvvet fonksiyonunun türevini belirtelim.

**Çözüm:** Türevin tanımından şu sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + \binom{n}{n} (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1} \Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1} \Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \left( nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right) = nx^{n-1} + 0 + \dots + 0 = nx^{n-1} \end{aligned}$$

Her  $n \in \mathbb{N}$  ve  $x \in \mathbb{R}$  için  $(x^n)' = nx^{n-1}$  elde ettik.

Bu formülü kullanarak, daha önce türevini bulduğumuz fonksiyonların türevlerini doğrulayabiliriz:  $(x)' = 1$ ,  $(x^2)' = 2x$ ,  $(x^3)' = 3x^2$ ,  $(x^4)' = 4x^3$  ....

Formülün sadece  $n \in \mathbb{N}$  için değil, kuvvet herhangi bir reel sayı olduğunda da kullanılabileceği gösterilmiştir.

Formülleri kullanarak, önceki modül biriminde örnek 5 ve örnek 6' da elde ettiğimiz iki çözümlü de doğrulayabiliriz, yani:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x})' &= \left( x^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \\ \left( \frac{1}{x} \right)' &= (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

**Örnek 3.**  $(x^n)' = nx^{n-1}$  formülünü kullanarak aşağıdaki fonksiyonların türevini bulunuz:

a)  $f(x) = x^5$ ,                      b)  $f(x) = \frac{1}{x^2} \quad x \neq 0$                       c)  $y = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad x > 0$

**Çözüm:**

$$\begin{aligned} \text{a) } (x^5)' &= 5x^{5-1} = 5x^4, \\ \text{b) } \left( \frac{1}{x^2} \right)' &= (x^{-2})' = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}, \\ \text{c) } \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right)' &= \left( x^{-\frac{1}{2}} \right)' = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}. \end{aligned}$$

**Örnek 4.**  $f(x) = \log_a x$ ,  $x \in R^+$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  logaritmik fonksiyonunun türevini belirtelim.

**Çözüm:** Türevin tanımından ve  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$  limitin değerinden şu sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \left( \frac{x+\Delta x}{x} \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{x}} = \\ &= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \log_e a} = \frac{1}{x \ln a} \end{aligned}$$

Her  $x \in R^+$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  için,  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$  elde ettik.

$a = e$  koyarsak, o zaman  $\log_e x = \ln x$  ve  $\ln e = 1$  olur, bu nedenle  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$  formülü elde edilir.

**Örnek 5.**  $f(x) = a^x$ ,  $x \in R$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  üstel fonksiyonunun türevini belirtelim.

**Çözüm:** Türevin tanımından ve  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$  ( $a > 0$  için) limit değerinden şu sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x a^{\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \ln a \end{aligned}$$

Her  $x \in R$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  için,  $(a^x)' = a^x \times \ln a$  elde ettik.

$a = e$  koyarsak, o zaman  $a^x = e^x$  ve  $\ln e = 1$  olur, bu nedenle  $(e^x)' = e^x$  formülü geçerli olacaktır.

**Örnek 6.**  $f(x) = \sin x$  fonksiyonunun türevini belirtelim.

**Çözüm:** Türevin tanımından ve  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  limit değerinden şu sonuç elde edilir:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$  trigonometrik formülünü uygulayarak şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} \sin \frac{x + \Delta x - x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \end{aligned}$$

$$= \cos(x + 0) \cdot 1 = \cos x$$

Buna göre,  $(\sin x)' = \cos x$  elde edilir.

Örnek 7.  $f(x) = \cos x$  fonksiyonunun türevini belirtelim.

**Çözüm:** Türevin tanımından ve  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  limit değerinden şunu elde ediyoruz:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} =$$

$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$  trigonometrik formülünü uygulayarak şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{x + \Delta x + x}{2} \sin \frac{x + \Delta x - x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \\ &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \end{aligned}$$

$$= -\sin(x + 0) \cdot 1 = -\sin x$$

Demek ki,  $(\cos x)' = -\sin x$ .

Örnek 8.  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $x \in R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in Z \right\}$  fonksiyonunun türevini belirtelim.

**Çözüm:** Türevin tanımından ve  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  limit değerinden şunu elde ediyoruz:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x + \Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x + \Delta x)}{\cos(x + \Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x + \Delta x) \cos x - \cos(x + \Delta x) \sin x}{\cos(x + \Delta x) \cos x}}{\Delta x} = \end{aligned}$$

$\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha - \beta)$  trigonometrik formülünü uygulayarak şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x - x)}{\Delta x \cos(x + \Delta x) \cos x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x \cos(x + \Delta x) \cos x} = \\ &= \frac{1}{\cos x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x + \Delta x)} = \\ &= \frac{1}{\cos x} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\cos(x + 0)} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ için } x \in R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in Z \right\} \text{ elde ettik.}$$

**Örnek 9.**  $f(x) = ctgx$ ,  $x \in R \setminus \{k\pi \mid k \in Z\}$  fonksiyonunun türevini belirtelim.

**Çözüm:** Türevin tanımından ve  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  limit değerinden şunu elde ediyoruz:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{ctg(x + \Delta x) - ctgx}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos(x + \Delta x)}{\sin(x + \Delta x)} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos(x + \Delta x) \sin x - \sin(x + \Delta x) \cos x}{\sin(x + \Delta x) \sin x}}{\Delta x} = \end{aligned}$$

$\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha - \beta)$  trigonometrik formülünü uygulayarak şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x - x - \Delta x)}{\Delta x \sin(x + \Delta x) \sin x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(-\Delta x)}{\Delta x \sin(x + \Delta x) \sin x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x \sin(x + \Delta x) \sin x} = \\ &= - \frac{1}{\sin x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin(x + \Delta x)} = \\ &= - \frac{1}{\sin x} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sin(x + 0)} = - \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} = - \frac{1}{\sin^2 x} \\ (ctgx)' &= - \frac{1}{\sin^2 x} \text{ için } x \in R \setminus \{k\pi \mid k \in Z\} \text{ elde ettik.} \end{aligned}$$

Bir fonksiyonun türevini hesaplamak, elementer fonksiyonların türev tablosu ve elementer olmayan fonksiyonların türevini hesaplama kuralları kullanılarak yapılır.

Daha önce elde ettiğimiz sonuçları kullanarak, elementer fonksiyonların türev tablosunu oluşturabiliriz.

#### Elementer Fonksiyonların Türev Tablosu:

1.  $(C)' = 0$ ,  $(C = \text{const})$
2.  $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ 
  - 2.1.  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  için  $x \in R^+$
  - 2.2.  $(x)' = 1$
3.  $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ , için  $x \in R$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .
4.  $(e^x)' = e^x$



$$5. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x \in \mathbb{R}^+, a > 0, a \neq 1.$$

$$6. (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad x \in \mathbb{R}^+$$

$$7. (\sin x)' = \cos x$$

$$8. (\cos x)' = -\sin x$$

$$9. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$10. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

İspatlanmadan alacağımız ve ezberlenmesi gereken diğer formüller şunlardır:

$$11. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$12. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$13. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$14. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

**Örnek 10.** Tablo türevlerini kullanarak türevleri hesaplayınız:

$$a) y' = (x^3)'$$

$$b) y' = \left( \frac{1}{x^5} \right)'$$

$$c) y' = (\sqrt[4]{x})'$$

**Çözüm:**

$$a) y' = (x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2 \quad b) y' = \left( \frac{1}{x^5} \right)' = (x^{-5})' = -5x^{-5-1} = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$$

$$c) y' = (\sqrt[4]{x})' = \left( x^{\frac{1}{4}} \right)' = \frac{1}{4} x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

**Örnek 11.** Tablo türevlerini kullanarak türevleri hesaplayın:

$$a) y' = (e^x)'$$

$$b) y' = (5^x)'$$

$$c) y' = (\log_2 x)'$$

**Çözüm:**

a)  $y' = (e^x)' = e^x$

b)  $y' = (5^x)' = 5^x \ln 5$

c)  $y' = (\log_2 x)' = \frac{1}{x \ln 2}$

**Alıştırma Problemleri:**

1. Fonksiyonların türevini hesaplayınız:

a)  $f(x) = x^7$

b)  $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$

c)  $f(x) = 5$

ç)  $f(x) = \frac{1}{x^4}$

2. Fonksiyonların türevini hesaplayınız:

a)  $f(x) = 7^x$

b)  $f(x) = \log_7 x$

c)  $f(x) = \ln x$

ç)  $f(x) = \operatorname{ctgx}$

3. Fonksiyonların türevini hesaplayınız:

a)  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

b)  $f(x) = \log_3 x$

c)  $f(x) = \cos x$

ç)  $f(x) = \operatorname{tg} x$

4. Fonksiyonların türevini hesaplayınız:

a)  $f(x) = e^x$

b)  $f(x) = \operatorname{arctg} x$

c)  $f(x) = x$

ç)  $f(x) = \arcsin x$

5. Fonksiyonların türevini hesaplayınız:

a)  $f(x) = 2^x \cdot 3^x$

b)  $f(x) = \operatorname{arcctg} x$

c)  $f(x) = x\sqrt[3]{x}$

ç)  $f(x) = \arccos x$

### 3. TOPLAM, FARK, ÇARPIM VE BÖLÜMÜN TÜREVİ

Aritmetik işlemlerden bazıları ile elde edilen fonksiyonların türevini belirlemek, tanım gereği uzun ve karmaşık bir süreçtir. Bu şekilde elde edilen fonksiyonların türevini belirlemek için, türevi bulmayı çok daha kolaylaştıran belirli kuralları vardır.

#### FONKSİYONLARIN TOPLAMI VE FARKI TÜREVİ

Türevlenebilir olan  $u(x)$  ve  $v(x)$  gibi iki fonksiyonun toplamı olarak gösterilen fonksiyonları inceleyelim. Bu fonksiyonlar için  $u'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$  ve  $v'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}$  geçerlidir.

Türevin tanımına göre şunu belirtebiliriz:

$$\begin{aligned} (u(x) + v(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)) - (u(x) + v(x))}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x + \Delta x) - u(x)) + (v(x + \Delta x) - v(x))}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = u'(x) + v'(x). \end{aligned}$$

Dolayısıyla,  $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$  elde edilir.

Benzer şekilde, iki fonksiyonun farkı için aşağıdaki fark formülü de ispatlanabilir:

$$(u(x) - v(x))' = u'(x) - v'(x).$$

**Örnek 1.** Aşağıdaki fonksiyonların türevini belirtelim:

a)  $y = x^2 + \sin x$                       b)  $y = x^5 - e^x$

**Çözüm:**

a)  $y' = (x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x$

b)  $y' = (x^5 - e^x)' = (x^5)' - (e^x)' = 5x^4 - e^x$

**Not:** Bu kural genelleştirilebilir ve üç veya daha fazla fonksiyonun toplamı ve farkı için geçerlidir.

**Örnek 2.** Aşağıdaki fonksiyonların türevini belirleyin:

a)  $y = x^3 + \cos x + 3^x$

b)  $y = x - \operatorname{tg} x + \ln x - 2$

**Çözüm:**

a)  $y' = (x^3 + \cos x + 3^x)' = (x^3)' + (\cos x)' + (3^x)' = 3x^2 - \sin x + 3^x \ln 3$

b)  $y' = (x - \operatorname{tg} x + \ln x - 2)' = (x)' - (\operatorname{tg} x)' + (\ln x)' - (2)' = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x} - 0 = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x}$

### SABİTİ VE FONKSİYONUN ÇARPIMI BİÇİMİNDE İFADENİN TÜREVİ

$C = \text{sabit}$  fonksiyonu ile türevlenebilir olan ve türevi  $u'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$  olan bir  $u(x)$  fonksiyonunun çarpımı olarak temsil edilebilen bir fonksiyonu ele alalım.

Türevin tanımına göre şunu yazabiliriz:

$$\begin{aligned} (C \cdot u(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C \cdot u(x + \Delta x) - C \cdot u(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C \cdot (u(x + \Delta x) - u(x))}{\Delta x} = \\ &= C \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = C \cdot u'(x) \end{aligned}$$

Dolayısıyla,  $(C \cdot u(x))' = C \cdot u'(x)$ .

**Örnek 3.** Aşağıdaki fonksiyonların türevini belirtelim:

a)  $y = \frac{1}{3}x^3$

b)  $y = 4 \cos x$

**Çözüm:**

a)  $y' = \left( \frac{1}{3}x^3 \right)' = \frac{1}{3}(x^3)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$

b)  $y' = (4 \cos x)' = 4(\cos x)' = 4 \cdot (-\sin x) = -4 \sin x$

### FONKSİYONLARIN ÇARPIMININ TÜREVİ

Türevlenebilir olan ve  $u'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$  ve  $v'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}$  e sahip iki fonksiyonun çarpımı olarak temsil edilebilen bir fonksiyonu ele alalım.

Türevin tanımı gereğince şunu elde ediyoruz:

$$\begin{aligned}
 (u(x) \cdot v(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x + \Delta x) - u(x)) \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot (v(x + \Delta x) - v(x))}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = \\
 &= u'(x) \cdot v(x + 0) + u(x) \cdot v'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)
 \end{aligned}$$

Dolayısıyla,  $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$  formülü elde edilir.

**Örnek 4.** Verilen fonksiyonların türevini belirtiniz:

a)  $y = x^3 \cdot \sin x$                       b)  $y = x^2 \ln x$                       c)  $y = (x^2 - 3x) \cdot e^x$

**Çözüm:**

$$\begin{aligned}
 \text{a) } y' &= (x^3 \cdot \sin x)' = (x^3)' \sin x + x^3 (\sin x)' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x \\
 \text{b) } y' &= (x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x \\
 \text{c) } y' &= ((x^2 - 3x)e^x)' = (x^2 - 3x)' e^x + (x^2 - 3x)(e^x)' = \\
 &= (2x - 3)e^x + (x^2 - 3x)e^x = e^x (2x - 3 + x^2 - 3x) = e^x (x^2 - x - 3)
 \end{aligned}$$

**Not:** Bu kural üç ya da daha fazla fonksiyonun çarpımı için de genelleştirilebilir.

**Örnek 5.** Verilen fonksiyonların türevini belirtiniz:

a)  $y = x^3 \cos x \ln x$                       b)  $y = x^2 e^x \ln x$

**Çözüm:**

$$\begin{aligned}
 \text{a) } y' &= (x^3 \cdot \cos x \cdot \ln x)' = (x^3)' \cdot \cos x \cdot \ln x + x^3 \cdot (\cos x)' \cdot \ln x + x^3 \cdot \cos x \cdot (\ln x)' = \\
 &= 3x^2 \cdot \cos x \cdot \ln x + x^3 \cdot (-\sin x) \cdot \ln x + x^3 \cdot \cos x \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 \cos x \ln x - x^3 \sin x \ln x + x^2 \cos x \\
 \text{b) } y' &= (x^2 e^x \ln x)' = (x^2)' e^x \ln x + x^2 (e^x)' \ln x + x^2 e^x (\ln x)' = \\
 &= 2x e^x \ln x + x^2 e^x \ln x + x^2 e^x \cdot \frac{1}{x} = 2x e^x \ln x + x^2 e^x \ln x + x e^x = x e^x (2 \ln x + x \ln x + 1)
 \end{aligned}$$

## FONKSİYONLARIN BÖLÜMÜNÜN TÜREVİ

Türevlenebilir olan  $u(x)$  ve  $v(x)$ ,  $v(x) \neq 0$  ve  $u'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}$  ve  $v'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}$  e sahip iki fonksiyonun bölümü olarak temsil edilebilen bir fonksiyonu ele alalım.

Türevin tanımına göre şunu yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{u(x)}{v(x)} \right)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x+\Delta x)}{v(x)v(x+\Delta x)}}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x) + u(x)v(x) - u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot v(x) \cdot v(x+\Delta x)} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x+\Delta x) - u(x))v(x) - u(x)(v(x+\Delta x) - v(x))}{\Delta x \cdot v(x) \cdot v(x+\Delta x)} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} v(x) - u(x) \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}}{v(x)v(x+\Delta x)} = \\
 &= \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot v(x) - u(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}}{v(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x+\Delta x)} = \\
 &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x) \cdot v(x)} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}
 \end{aligned}$$

Dolayısıyla,  $\left( \frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$  formülü elde edilir.

**Örnek 6.** Aşağıdaki fonksiyonların türevini belirtelim:

a)  $y = \frac{2x}{x+3}$       b)  $y = \frac{1+x^3}{1-x^3}$

**Çözüm:**

$$\begin{aligned}
 \text{a) } y' &= \left( \frac{2x}{x+3} \right)' = \frac{(2x)'(x+3) - 2x(x+3)'}{(x+3)^2} = \\
 &= \frac{2 \cdot (x+3) - 2x \cdot (1+0)}{(x+3)^2} = \frac{2x+6-2x}{(x+3)^2} = \frac{6}{(x+3)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } y' &= \left( \frac{1+x^3}{1-x^3} \right)' = \frac{(1+x^3)'(1-x^3) - (1+x^3)(1-x^3)'}{(1-x^3)^2} = \\
 &= \frac{(0+3x^2)(1-x^3) - (1+x^3)(0-3x^2)}{(1-x^3)^2} = \frac{3x^2 - 3x^5 + 3x^2 + 3x^5}{(1-x^3)^2} = \frac{6x^2}{(1-x^3)^2}.
 \end{aligned}$$

Türev kurallarını yazıp ezberleyebiliriz, kısa yazmak için  $u(x) = u$  ve  $v(x) = v$  fonksiyonlarını kullanacağız.

$(u \pm v)' = u' \pm v'$  - fonksiyonların toplamının ve farkının türevi

$(C \cdot u)' = C \cdot u'$ ,  $C$  = sabit için - sabit ile fonksiyonun çarpımının türevi

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$  - fonksiyonların çarpımının türevi

$\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ ,  $v(x) \neq 0$  için - fonksiyonların bölümünün türevi

**Örnek 7.** Aşağıdaki fonksiyonların türevini belirleyin:

a)  $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

b)  $f(x) = x^3 \cos x$

c)  $f(x) = \frac{x^4 - 3x^3 + 1}{2x^2 - 1}$

ç)  $f(x) = x \sin x - \cos x$

d)  $f(x) = \frac{x^2 + 2}{1 + \cos x}$

e)  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

**Çözüm:**

a)  $f'(x) = (3x^2 - 2x + 5)' = 6x - 2$ ;

b)  $f'(x) = (x^3 \cos x)' = (x^3)' \cos x + x^3 (\cos x)' = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } f'(x) &= \left( \frac{x^4 - 3x^3 + 1}{2x^2 - 1} \right)' = \frac{(x^4 - 3x^3 + 1)'(2x^2 - 1) - (x^4 - 3x^3 + 1)(2x^2 - 1)'}{(2x^2 - 1)^2} = \\
 &= \frac{(4x^3 - 9x^2 + 0)(2x^2 - 1) - (x^4 - 3x^3 + 1)(4x - 0)}{(2x^2 - 1)^2} = \\
 &= \frac{8x^5 - 18x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x^5 + 12x^4 - 4x}{(2x^2 - 1)^2} = \\
 &= \frac{4x^5 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x}{(2x^2 - 1)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ç)} f'(x) &= (x \sin x - \cos x)' = (x \sin x)' - (\cos x)' = (x)' \sin x + x(\sin x)' - (\cos x)' = \\ &= \sin x + x \cos x + \sin x = 2 \sin x + x \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} f'(x) &= \left( \frac{x^2 + 2}{1 + \cos x} \right)' = \frac{(x^2 + 2)'(1 + \cos x) - (x^2 + 2)(1 + \cos x)'}{(1 + \cos x)^2} = \\ &= \frac{(2x + 0)(1 + \cos x) - (x^2 + 2)(0 - \sin x)}{(1 + \cos x)^2} = \frac{2x + 2x \cos x + x^2 \sin x + 2 \sin x}{(1 + \cos x)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} f'(x) &= \left( \frac{x+1}{x-1} \right)' = \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{(1+0)(x-1) - (x+1)(1-0)}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

### Alıştırma soruları

Türevlerin tablosu ve türevlenme kurallarını kullanarak verilen fonksiyonların türevini belirtiniz:

1.  $f(x) = 5x$

2.  $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

3.  $y = x^3 - 3x + 2$

4.  $f(x) = 3x^4 - 6x^3 + x^2 - 4x + 8$

5.  $f(x) = x + \frac{1}{x}$

6.  $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4}$

7.  $f(x) = \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^2}$

8.  $f(x) = x^2 - 2 \sin x$

9.  $f(x) = 2 \sin x + 4 \cos x$

10.  $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + 5^x$

11.  $f(x) = x^4 \ln x$

12.  $f(x) = x^3 \cdot \cos x$

13.  $f(x) = 2x \cdot \sin x$

14.  $f(x) = x^{12} e^x \operatorname{tg} x$

15.  $y = e^x \cdot \arcsin x$

16.  $y = (3x^2 + 1)(2x - 4)(x^3 - 1)$

17.  $f(x) = x^2 - \sin x \cos x$

18.  $f(x) = \frac{2x+1}{x}$

19.  $f(x) = \frac{1-x}{x^2+1}$

20.  $y = \frac{x^2+3x}{x^2-1}$

21.  $y = \frac{x-1}{x^2-4}$

22.  $y = \frac{x+3}{x^2-4}$



$$23. y = \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 2x}$$

$$25. y = \frac{xe^x}{\sin x}$$

$$27. f(x) = 2 \sin x - \frac{1}{2}e^x + 7 \arctg x + 2$$

$$29. f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$31. y = \sqrt[7]{x^6} + \log_6 x - \operatorname{tg} x$$

$$33. f(x) = \frac{34 - 10x + x^2}{2x - 10}$$

$$35. y = \frac{\ln x \cdot \cos x}{x^2}$$

$$37. y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$39. y = \frac{(1 + \sqrt[3]{x})^3}{\sqrt{x}}$$

$$24. f(x) = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$$

$$26. f(x) = \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$$

$$28. y = \sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{4x^3}$$

$$30. y = \frac{e^x + \cos x}{xe^x}$$

$$32. y = x^4 \cdot e^x \cdot \sin x$$

$$34. y = \frac{e^x + \sin x}{xe^x}$$

$$36. y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$38. y = \ln x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \sqrt{x}$$

$$40. y = \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}$$

## 4. KARMAŞIK BİR FONKSİYONUN TÜREVİ

$f(x) = 2\sin x$  ve  $g(x) = x^2 + 1$  fonksiyonlarının verildiğini varsayalım.  $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$  ve  $r(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$  fonksiyonlarını oluşturalım.

$$h(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = 2\sin(x^2 + 1)$$

$$r(x) = g(f(x)) = g(2\sin x) = (2\sin x)^2 + 1 = 4\sin^2 x + 1.$$

$h(x) = f(g(x))$  ve  $r(x) = g(f(x))$  fonksiyonlarına bileşik fonksiyonlar veya  $f(x)$  ve  $g(x)$ 'in bileşkesi (kompozisyonu) denir.

$y = \cos(x^2 + 2)$  fonksiyonu,  $f(x) = \cos x$  ve  $g(x) = x^2 + 2$  fonksiyonlarından elde edilen bir bileşik fonksiyon olarak kabul edilebilir, çünkü  $f(g(x)) = f(x^2 + 2) = \cos(x^2 + 2) = y$ .

$y = \cos(x^2 + 2)$  bileşik fonksiyonunu  $u(x) = x^2 + 2$  fonksiyonu yardımıyla yazarsak,  $y = \cos(u)$  elde ederiz. Bu yazım şeklinde  $u(x)$  fonksiyonuna **ara (yardımcı) fonksiyon** denir.

Ara fonksiyon  $u(x)$  tek olarak bir şekilde tanımlanmamıştır.

**Örnek 1.** Aşağıda bileşik fonksiyonlar verilmiştir. Ara fonksiyon  $u(x)$ 'i belirtiniz ve fonksiyonu  $y = f(u)$  biçiminde yazınız:

a)  $y = \sqrt{x^2 + 2x}$

b)  $y = e^{2x+1}$

c)  $y = \ln(x^2 + 3x - 4)$

ç)  $y = (x^2 + 1)^9$

**Çözüm:**

a)  $y = \sqrt{x^2 + 2x}$  için,  $u(x) = x^2 + 2x$  ve  $y = \sqrt{u}$ 'dur.

b)  $y = e^{2x+1}$  için,  $u(x) = 2x + 1$  ve  $y = e^u$  dur.

c)  $y = \ln(x^2 + 3x - 4)$  için  $u(x) = x^2 + 3x - 4$  ve  $y = \ln(u)$ 'dur.

d)  $y = (x^2 + 1)^9$  için  $u(x) = x^2 + 1$  ve  $y = u^9$ 'dur.

$y = f(u(x))$  bir bileşik fonksiyon olsun, yani  $y = f(u)$  ve  $u = u(x)$ .

$y' = f'(u)$  ve  $u' = u'(x)$  türevi varsa,  $y'$ 'nin  $x$ 'e göre türevi de vardır ve aşağıdaki geçerlidir:

$$y' = (f(u(x)))' = f'(u) \cdot u'$$

Bileşik fonksiyonun türevini hesaplama kuralı tanım gereği kanıtlanabilir. Bu bölümde ifadeyi kanıtlamayacağız.

**Örnek 2.**  $y = (x^2 + 1)^9$  fonksiyonunun türevini bulunuz.

**Çözüm:**  $y = (x^2 + 1)^9$  fonksiyonu bileşik bir fonksiyondur ve  $u = x^2 + 1$  ara fonksiyonuyla  $y = (x^2 + 1)^9 = u^9$  fonksiyonu elde edilir.

Dolayısıyla,  $y' = ((x^2 + 1)^9)' = (u^9)' = 9u^8 \times u' = 9(x^2 + 1)^8 \times (x^2 + 1)' = 9(x^2 + 1)^8 \times (2x + 0) = 18x(x^2 + 1)^8$  elde edilir.

**Örnek 3.**  $y = e^{2x+1}$  fonksiyonunun türevini bulunuz.

**Çözüm:**  $y = y = e^{2x+1}$  fonksiyonu bileşik bir fonksiyondur ve  $u = 2x + 1$  ara fonksiyonuyla  $y = e^{2x+1} = e^u$  fonksiyonu elde edilir.

Dolayısıyla,  $y' = (e^{2x+1})' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{2x+1} (2x+1)' = e^{2x+1} (2 \cdot 1 + 0) = 2e^{2x+1}$  elde edilir.

**Örnek 4.**  $y = \ln(x^2 + 3x - 4)$  fonksiyonunun türevini bulunuz.

**Çözüm:**  $y = \ln(x^2 + 3x - 4)$  fonksiyonu bileşik bir fonksiyondur ve  $u = x^2 + 3x - 4$  ara fonksiyonuyla  $y = \ln(x^2 + 3x - 4) = \ln u$  fonksiyonu elde edilir.

Dolayısıyla,  $y' = (\ln(x^2 + 3x - 4))' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{x^2 + 3x - 4} \cdot (x^2 + 3x - 4)' =$   
 $= \frac{1}{x^2 + 3x - 4} \cdot (2x + 3 - 0) = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x - 4}$  elde edilir.

**Örnek 5.**  $y = \sin(x^2)$  fonksiyonunun türevini bulun.

**Çözüm:**  $y = \sin(x^2)$  fonksiyonu bileşik bir fonksiyondur ve  $u = x^2$  ara fonksiyonuyla  $y = \sin(x^2) = \sin u$  fonksiyonu elde edilir.

Dolayısıyla,  $y' = (\sin(x^2))' = (\sin u)' = \cos u (u)' = \cos x^2 \cdot (x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2$  elde edilir.

**Örnek 6.**  $y = \sin^2 x$  fonksiyonunun türevini bulun.

**Çözüm:**  $y = \sin^2 x$  fonksiyonu bileşik bir fonksiyondur ve  $u = \sin x$  ara fonksiyonuyla  $y = \sin^2 x = (\sin x)^2 = u^2$  fonksiyonu elde edilir.

Dolayısıyla,  $y' = (\sin^2 x)' = (u^2)' = 2u(u)' = 2 \sin x (\sin x)' = 2 \sin x \cdot \cos x =$   
 $= 2 \sin x \cos x = \sin 2x$  elde edilir.

Alıştırma çift açların sinüsü formülünden yararlanıyoruz.

**Örnek 6.**  $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$  fonksiyonunun türevini bulun.

**Çözüm:**  $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$  fonksiyonu bileşik bir fonksiyondur ve  $u = \frac{1+x}{1-x}$  ara fonksiyonuyla

$y = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln u$  fonksiyonu elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{Dolayısıyla, } y' &= \left( \ln \frac{1+x}{1-x} \right)' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \left( \frac{1+x}{1-x} \right)' = \\ &= \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{(1+x)'(1-x) - (1+x)(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{(0+1) \cdot (1-x) - (1+x) \cdot (0-1)}{(1-x)^2} = \\ &= \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{2}{1-x} = \frac{2}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{1-x^2} \end{aligned}$$

Elementer fonksiyonların türev tablosuna bileşik fonksiyonun türevi kuralını uygularsak, bileşik fonksiyonların türevleri için yeni bir tablo elde ederiz.

#### Bileşik Fonksiyonların Türev Tablosu:

1.  $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
2.  $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
3.  $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$ ,  $\exists a > 0, a \neq 1$ .
4.  $(e^u)' = e^u \cdot u'$
5.  $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$ ,  $\exists a > 0, a \neq 1$ .
6.  $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
7.  $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
8.  $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
9.  $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
10.  $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

**Not:** Bu tabloda, ara (yardımcı) değişken  $u$ ,  $x$ 'in bir fonksiyonudur,  $u = u(x)$ .

**Örnek 7.**  $y = \frac{1}{(3x^2 + 2)^7} = (3x^2 + 2)^{-7}$  fonksiyonunun türevini bulunuz.

**Çözüm:**  $y = (3x^2 + 2)^{-7}$  fonksiyonu bileşik bir fonksiyondur ve  $u = 3x^2 + 2$  ara fonksiyonuyla  $y = \frac{1}{(3x^2 + 2)^7} = (3x^2 + 2)^{-7}$  fonksiyonu elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{Dolayısıyla, } y' &= ((3x^2 + 2)^{-7})' = (u^{-7})' = (-7)u^{-8} \cdot u' = (-7)(3x^2 + 2)^{-8} (3x^2 + 2)' = \\ &= (-7)(3x^2 + 2)^{-8} (6x + 0)' = -42x(3x^2 + 2)^{-8} = -\frac{42x}{(3x^2 + 2)^8} \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

**Not:** Bileşik fonksiyonların türevlerini bulma problemlerini çözerken, bundan sonra ara fonksiyonla değiştirme yapmak zorunda değiliz, ara fonksiyonun ne olduğuna dikkat edilir ve değiştirme yazılmadan bileşik fonksiyonun türevi hesaplanır.

**Örnek 8.**  $y = e^{\cos x}$  fonksiyonunun türevini bulunuz.

**Çözüm:**  $y = e^{\cos x}$  fonksiyonu bileşik bir fonksiyondur ve  $u = \cos x$  ara fonksiyonuyla  $y = e^u$  fonksiyonu elde edilir. Şimdi ara fonksiyonu değiştirmeyeceğiz.

$$\text{Dolayısıyla, } y' = (e^{\cos x})' = e^{\cos x} (\cos x)' = e^{\cos x} (-\sin x) = -e^{\cos x} \sin x \text{ elde edilir.}$$

**Örnek 9.**  $y = e^{2x} \cos x$  fonksiyonunun türevini bulunuz.

**Çözüm:**

$$\begin{aligned} y' &= (e^{2x} \cos x)' = (e^{2x})' \cos x + e^{2x} (\cos x)' = e^{2x} (2x)' \cos x - e^{2x} \sin x = \\ &= 2e^{2x} \cos x - e^{2x} \sin x = e^{2x} (2 \cos x - \sin x) \end{aligned}$$

**Örnek 10.**  $y = \ln \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$  fonksiyonunun türevini bulun.

**Çözüm:**  $y = \ln \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$  fonksiyonu bileşik bir fonksiyondur, dolayısıyla:

$$y' = \left( \ln \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \right)' = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}} \left( \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \right)' =$$

$\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$  fonksiyonu bileşik bir fonksiyon olduğundan, bileşik fonksiyonun türevi kuralını tekrar uyguluyoruz:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}} \cdot \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' = \\
 &= \frac{1}{2 \left( \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \right)^2} \cdot \frac{(1-x^2)'(1+x^2) - (1-x^2)(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \frac{(0-2x) \cdot (1+x^2) - (1-x^2) \cdot (0+2x)}{(1+x^2)^2} = \\
 &= \frac{1+x^2}{2(1-x^2)} \cdot \frac{-2x-2x^3-2x+2x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2}{2(1-x^2)} \cdot \frac{-4x}{(1+x^2)^2} = \\
 &= \frac{1}{(1-x^2)} \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)} = -\frac{2x}{(1-x^2)(1+x^2)} = -\frac{2x}{1-x^4} = \frac{2x}{x^4-1}
 \end{aligned}$$

### Alıştırma Problemleri:

Bileşik fonksiyonun türevi kuralını ve fonksiyonların toplamı, farkı, çarpımı ve bölümünün türevi kurallarını kullanarak aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz:

1.  $f(x) = (5x-7)^3$

2.  $y = \sqrt{3x-5}$

3.  $y = e^{x^2-2x+5}$

4.  $y = \ln(2x-9)$

5.  $f(x) = \ln \frac{x^2}{1-x^2}$

6.  $y = \ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

7.  $f(x) = x \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$

8.  $f(x) = x \sin x^4$

9.  $y = \sin x^5$

10.  $y = \sin^5 x$

11.  $y = \cos^3 x \cdot \cos x^3$

12.  $y = 1 - \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x$

$$13. y = \left( \frac{x-3}{x+3} \right)^3$$

$$15. f(x) = \sin \sqrt{1+x^2}$$

$$17. y = \ln(\sin(x^2 - 2x + 2))$$

$$19. y = \ln \sqrt{\frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}}$$

$$21. f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 6x - 27}$$

$$23. y = (x+1)\sqrt{x^2 + 1}$$

$$25. y = \ln \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

$$14. y = e^{\lg x}$$

$$16. y = \frac{1}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{4} \ln(x^2 - 1)$$

$$18. y = \ln \frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x} - \sqrt{x^2 + 1}$$

$$20. y = e^{\sin x}$$

$$22. y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$24. y = \frac{(x^2 + 1)^{10}}{5}$$

## 5. LOGARİTMİK TÜREVLER

Örnek 1.  $y = x^x$  fonksiyonunun türevini hesaplayalım.

$y = x^x$  fonksiyonunun türevi, önceki türev kuralları kullanılarak hesaplanamaz, çünkü fonksiyonun hem tabanında hem de üssünde değişken vardır. Fonksiyonun türevini hesaplamak için logaritmik türev alma kuralını kullanacağız.

$f(x)$  ve  $g(x)$  fonksiyonlarının pozitif ve türevlenebilir olduğu  $y = f(x)^{g(x)}$  fonksiyonu verilsin. Fonksiyonun türevini hesaplamak için önce eşitliğin logaritmasını alacağız ve ardından ifadeyi basitleştirmek için logaritma özelliklerini kullanacağız.

$y = f(x)^{g(x)}$  her iki tarafın logaritması alınır

$$\ln y = \ln \left( f(x)^{g(x)} \right)$$

$$\ln y = g(x) \ln \left( f(x) \right)$$

Şimdi her iki tarafın türevini alabiliriz, burada dikkat etmemiz gereken husus  $y = y(x)$  bileşik fonksiyon olduğunu ve  $x$  değişkeninin bileşik bir fonksiyonu olduğudur. Buna göre sağ tarafında çarpımın türevini kullanacağız.

$$(\ln y)' = (g(x) \ln(f(x)))'$$

$$\frac{1}{y} y' = (g(x))' \ln(f(x)) + g(x) (\ln(f(x)))'$$

Buradan şu sonuç elde edilir:

$$y' = y \cdot ((g(x))' \ln(f(x)) + g(x) (\ln(f(x)))')$$

$$y' = f(x)^{g(x)} \cdot ((g(x))' \ln(f(x)) + g(x) (\ln(f(x)))')$$

Fonksiyonun türevini belirleme kuralına, **logaritmik türev alma kuralı** denir.

Bu kuralı kullanarak  $y = x^x$  fonksiyonunun türevini belirtiniz.

Şimdi Örnek 1'deki fonksiyonun türevini bulma kuralına devam ediyoruz:

$y = x^x$  fonksiyonu verilsin, logaritmasını alırsak şunu elde ederiz:

$$\ln y = \ln x^x$$

$\ln y = x \times \ln x$ , eşitliğin türevini alarak şunu elde ederiz:

$$(\ln y)' = (x \ln x)'$$

$$\frac{1}{y} y' = (x)' \ln x + x (\ln x)'$$



$$\frac{1}{y} y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{y} y' = \ln x + 1$$

$y' = y \cdot (\ln x + 1)$ , orijinal fonksiyonu yerine koyarak türevin çözümünü elde ederiz.

$$y' = x^x \cdot (\ln x + 1)$$

**Örnek 2.** Logaritmik türev olarak  $y = (\cos x)^{\sin x}$  fonksiyonunun türevini bulunuz.

**Çözüm:** Önce  $y = (\cos x)^{\sin x}$  fonksiyonunun logaritmasını alalım.

$$\ln y = \ln(\cos x)^{\sin x}$$

$$\ln y = \sin x \cdot \ln(\cos x),$$

eşitliğin türevini alalım

$$(\ln y)' = (\sin x \cdot \ln(\cos x))'$$

$$\frac{1}{y} y' = (\sin x)' \cdot \ln(\cos x) + \sin x \cdot (\ln(\cos x))'$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln(\cos x) + \sin x \cdot \left( \frac{1}{\cos x} (\cos x)' \right)$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln(\cos x) + \sin x \cdot \left( \frac{1}{\cos x} (-\sin x) \right)$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln(\cos x) - \sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

$y' = y \cdot (\cos x \cdot \ln(\cos x) - \sin x \cdot \operatorname{tg} x)$  ve orijinal fonksiyonu yerine koyarak fonksiyonun türevini elde ederiz:

$$y' = (\cos x)^{\sin x} \cdot (\cos x \cdot \ln(\cos x) - \sin x \cdot \operatorname{tg} x)$$

**Örnek 3.** Logaritmik türev kuralını uygulayarak  $y = \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}}$  fonksiyonunun türevini bulunuz.

**Çözüm:**  $y = \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}}$  fonksiyonu için, üslü ifadelerin özelliklerini kullanarak fonksiyonu

$$y = \left( 1 + \frac{1}{x^3} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ olarak yazılabilir. Biçiminde yazabiliriz.}$$

$$\ln y = \ln \left( 1 + \frac{1}{x^3} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln y = \frac{1}{x} \cdot \ln \left( 1 + \frac{1}{x^3} \right)$$

$$(\ln y)' = \left( \frac{1}{x} \cdot \ln \left( 1 + \frac{1}{x^3} \right) \right)',$$

$$\frac{1}{y} y' = \left( \frac{1}{x} \right)' \cdot \ln \left( 1 + \frac{1}{x^3} \right) + \frac{1}{x} \cdot \left( \ln \left( 1 + \frac{1}{x^3} \right) \right)',$$

$$\frac{1}{y} y' = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln \left( 1 + \frac{1}{x^3} \right) + \frac{1}{x} \cdot \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{x^3}} \left( 1 + \frac{1}{x^3} \right)' \right)$$

$$\frac{1}{y} y' = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln \left( 1 + \frac{1}{x^3} \right) + \frac{1}{x} \cdot \left( \frac{1}{\frac{x^3+1}{x^3}} \cdot \left( -\frac{3}{x^4} \right) \right)$$

$$\frac{1}{y} y' = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln \left( 1 + \frac{1}{x^3} \right) - \frac{3}{x^2(x^3+1)}$$

$$y' = y \left( -\frac{1}{x^2} \cdot \ln \left( 1 + \frac{1}{x^3} \right) - \frac{3}{x^2(x^3+1)} \right) \text{ olduğundan,}$$

$$y' = -\frac{1}{x^2} \cdot \sqrt[1]{1 + \frac{1}{x^3}} \cdot \left( \ln \left( 1 + \frac{1}{x^3} \right) + \frac{3}{x^3+1} \right) \text{ elde edilir.}$$

**Örnek 4.** Logaritmik türev olarak  $y = \left( \frac{x-5}{x+3} \right)^{\frac{1}{x+3}}$  fonksiyonunun türevini bulun.

**Çözüm:**  $y = \left( \frac{x-5}{x+3} \right)^{\frac{1}{x+3}}$  fonksiyonunun logaritmasını alarak türevini belirtelim.

$$\ln y = \ln \left( \frac{x-5}{x+3} \right)^{\frac{1}{x+3}}$$

$$\ln y = \frac{1}{x+3} \ln \left( \frac{x-5}{x+3} \right), \text{ türevini alarak şunu elde ederiz:}$$

$$(\ln y)' = \left( \frac{1}{x+3} \ln \left( \frac{x-5}{x+3} \right) \right)',$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} y' &= \left( \frac{1}{x+3} \right)' \ln \left( \frac{x-5}{x+3} \right) + \frac{1}{x+3} \left( \ln \left( \frac{x-5}{x+3} \right) \right)' \\ \frac{1}{y} y' &= \left( -1(x+3)^{-2} (x+3)' \right) \ln \left( \frac{x-5}{x+3} \right) + \frac{1}{x+3} \left( \frac{1}{\frac{x-5}{x+3}} \left( \frac{x-5}{x+3} \right)' \right) \\ \frac{1}{y} y' &= \left( -\frac{1}{(x+3)^2} (1+0) \right) \ln \left( \frac{x-5}{x+3} \right) + \frac{1}{x+3} \cdot \frac{x+3}{x-5} \cdot \frac{(x-5)'(x+3) - (x-5)(x+3)'}{(x+3)^2} \\ \frac{1}{y} y' &= -\frac{1}{(x+3)^2} \ln \left( \frac{x-5}{x+3} \right) + \frac{1}{x-5} \cdot \frac{x+3-x+5}{(x+3)^2} \\ \frac{1}{y} y' &= -\frac{1}{(x+3)^2} \ln \left( \frac{x-5}{x+3} \right) + \frac{8}{(x-5)(x+3)^2} \\ y' &= y \left( -\frac{1}{(x+3)^2} \ln \left( \frac{x-5}{x+3} \right) + \frac{8}{(x-5)(x+3)^2} \right) \\ y' &= -\frac{1}{(x+3)^2} \cdot \left( \frac{x-5}{x+3} \right)^{\frac{1}{x+3}} \cdot \left( \ln \left( \frac{x-5}{x+3} \right) - \frac{8}{x-5} \right) \end{aligned}$$

**Örnek 5.** Logaritmik türev olarak  $y = \left( \frac{\ln x}{x} \right)^{\sin x}$  fonksiyonunun türevini bulunuz.

**Çözüm:**  $y = \left( \frac{\ln x}{x} \right)^{\sin x}$  fonksiyonunun logaritmasını alalım.

$$\ln y = \ln \left( \frac{\ln x}{x} \right)^{\sin x}$$

$$\ln y = \sin x \cdot \ln \left( \frac{\ln x}{x} \right) \text{ şimdi türevini alabiliriz:}$$

$$(\ln y)' = \left( \sin x \cdot \ln \left( \frac{\ln x}{x} \right) \right)'$$

$$\frac{1}{y} y' = (\sin x)' \cdot \ln \left( \frac{\ln x}{x} \right) + \sin x \cdot \left( \ln \left( \frac{\ln x}{x} \right) \right)'$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln \left( \frac{\ln x}{x} \right) + \sin x \cdot \frac{1}{\frac{\ln x}{x}} \cdot \left( \frac{\ln x}{x} \right)'$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln \left( \frac{\ln x}{x} \right) + \sin x \cdot \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2}$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln \left( \frac{\ln x}{x} \right) + \sin x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x}$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln \left( \frac{\ln x}{x} \right) + \sin x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x}$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln \left( \frac{\ln x}{x} \right) + \frac{\sin x \cdot (1 - \ln x)}{x \ln x}$$

$$y' = y \left( \cos x \cdot \ln \left( \frac{\ln x}{x} \right) + \frac{\sin x \cdot (1 - \ln x)}{x \ln x} \right) \text{ başlangıçtaki fonksiyonda değiştirmekle:}$$

$$y' = \left( \frac{\ln x}{x} \right)^{\sin x} \cdot \left( \cos x \cdot \ln \left( \frac{\ln x}{x} \right) + \frac{\sin x (1 - \ln x)}{x \ln x} \right) \text{ elde edilir.}$$

Logaritmik türev alma yöntemi, birden fazla farklı fonksiyonun çarpımı ve bölümü ile temsil edilen fonksiyonlarda da kullanılabilir ve çok karmaşık ifadelerden kaçınmak için önce fonksiyonun logaritması alınır, ardından türevi alınır.

**Örnek 6.** Logaritmik türev olarak  $y = \frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5}$  fonksiyonunun türevini bulalım.

**Çözüm:**  $y = \frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5}$  fonksiyonunun logaritmasını alalım.

$$\ln y = \ln \frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5}$$

$$\ln y = \ln \frac{(x+4)^{\frac{3}{5}}}{(x-1)^2(x+3)^5}$$

$$\ln y = \ln(x+4)^{\frac{3}{5}} - \ln(x-1)^2 - \ln(x+3)^5$$

$$\ln y = \frac{3}{5} \ln(x+4) - 2 \ln(x-1) - 5 \ln(x+3), \text{ şimdi türevini alabiliriz}$$

$$(\ln y)' = \left( \frac{3}{5} \ln(x+4) - 2 \ln(x-1) - 5 \ln(x+3) \right)'$$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{x+4} (x+4)' - 2 \cdot \frac{1}{x-1} (x-1)' - 5 \cdot \frac{1}{x+3} (x+3)'$$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{3}{5(x+4)} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x+3}$$

$$y' = y \left( \frac{3}{5(x+4)} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x+3} \right)$$

$$y' = \frac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5} \left( \frac{3}{5(x+4)} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x+3} \right)$$

### Alıştırma Problemleri:

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini, logaritmik türev alma kuralını kullanarak hesaplayınız:

$$1. y = \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^5}}$$

$$3. y = \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^7}}$$

$$5. y = (\sin x)^{\sin^2 x}$$

$$7. y = x^{\frac{1}{x}}$$

$$9. y = \left( 1 - \frac{1}{x+1} \right)^x$$

$$11. y = x^{-x}$$

$$13. y = \frac{x+3}{(x-7)\sqrt[4]{(x+2)^3}}$$

$$15. y = \frac{(1-x^2)e^{3x-1} \cos x}{\sin^3 x}$$

$$2. y = \left( \frac{x+7}{x-2} \right)^{\frac{1}{x-2}}$$

$$4. y = \left( \frac{x+5}{x+4} \right)^{\frac{1}{x+4}}$$

$$6. y = (\sin x)^{\cos x}$$

$$8. y = (\ln x)^x$$

$$10. y = x^{x+1}(x+1)$$

$$12. y = \left( \frac{\ln x}{x} \right)^{\cos x}$$

$$14. y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2} \cdot \sqrt[4]{(x+3)^3}}$$

$$16. y = \sqrt{(x+1)^3} \cdot \frac{2x-1}{x+2} \cdot e^{x^2} \cdot \sin^4 x \cdot \cos^3 x$$

## 6. TÜREVLERİN UYGULANMASI. BİR FONKSİYONUN TEĞET VE NORMALİNİN DENKLEMİ

### YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREVLER

$y=f(x)$  fonksiyonu  $x \in D_f$  için türevlenebilir olsun, yani tanım kümesindeki bir noktada fonksiyonun  $y'=f'(x)$  türevi mevcut olsun.

$y=f(x)$  fonksiyonunun **ikinci türevi** veya ikinci mertebeden türevi,  $y'=f'(x)$  fonksiyonunun türevidir ve  $y''=f''(x)=(f'(x))'$  ile gösterilir.

Bu nedenle,  $y'=f'(x)$  türevi  $y=f(x)$  fonksiyonunun **birinci türevi** olarak adlandırılır.

$y=f(x)$  fonksiyonunun  $y''=f''(x)$  ikinci türevinin türevi, **üçüncü türev** olarak adlandırılır ve  $y'''=f'''(x)=(f''(x))'$  ile gösterilir.

İşlem devam ettirilebilir.

$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$ ,  $y=f(x)$ 'in **n'inci türevi** olarak adlandırılır.

$f(x)$  fonksiyonu, tanım kümesindeki her noktada n'inci türevi mevcutsa n-türevlenebilirdir.

$n$  sonsuza vardığında, fonksiyonun sonsuz türevlenebilir olduğunu söyleriz.

**Örnek 1.** Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz:

a)  $y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{4}$  fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi

b)  $y = 4x^2 - \sin x$  fonksiyonunun üçüncü mertebeden türevi

c)  $y = \ln x$  fonksiyonunun dördüncü mertebeden türevi

**Çözüm:**

a)  $y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{4}$  fonksiyonunun ikinci mertebeden türevini belirleyelim. Önce birinci mertebeden türevi, sonra ikinci mertebeden türevi hesaplamamız gerekir.

$$y' = \left( \frac{1}{12}x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{4} \right)' = \frac{1}{12}(x^4)' - \frac{5}{6}(x^3)' + \left( \frac{1}{4} \right)' = \frac{1}{12} \cdot 4x^3 - \frac{5}{6} \cdot 3x^2 + 0 = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2$$

$$y'' = \left( \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 \right)' = \frac{1}{3}(x^3)' - \frac{5}{2}(x^2)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - \frac{5}{2} \cdot 2x = x^2 - 5x$$

b)  $y = 4x^2 - \sin x$  fonksiyonunun üçüncü mertebeden türevini belirleyelim. Tüm türevleri sırasıyla, birinci mertebeden türevi, ikinci mertebeden türevi ve son olarak üçüncü mertebeden türevi hesaplamamız gerekir.

$$y' = (4x^2 - \sin x)' = 4(x^2)' - (\sin x)' = 4 \cdot 2x - \cos x = 8x - \cos x$$

$$y'' = (8x - \cos x)' = 8(x)' - (\cos x)' = 8 \cdot 1 - (-\sin x) = 8 + \sin x$$

$$y''' = (8 + \sin x)' = (8)' + (\sin x)' = 0 + \cos x = \cos x$$

c)  $y = \ln x$  fonksiyonunun dördüncü mertebeden türevini belirlemek için, her mertebeden türevleri sırasıyla hesaplamamız gerekir.

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$y''' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = (-x^{-2})' = -(-2)x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

$$y^{(4)} = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = 2(x^{-3})' = 2 \cdot (-3) \cdot x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$$

### TEĞETİN DENKLEMİ

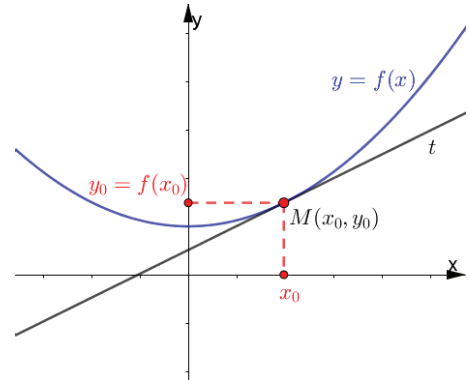
Türev kavramını tanımlarken,  $y = f(x)$  fonksiyonunun  $M(x_0, f(x_0))$  noktasındaki teğetin eğiminin, fonksiyonun  $M$  noktasındaki türevinin değerine eşit olduğunu gördük, yani  $k_t = f'(x_0)$ .

Bir  $A(x_0, y_0)$  noktasından geçen ve eğimi  $k$  olan bir doğrunun denklemi  $y - y_0 = k(x - x_0)$  ile belirlendiğinden,  $y = f(x)$  türevlenebilir fonksiyonunun  $M(x_0, f(x_0))$  noktasındaki teğetin denklemi,  $y_0 = f(x_0)$  ve  $k = k_t = f'(x_0)$  olmak üzere, aşağıdaki gibidir:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$y = f(x)$  fonksiyonunun grafiğinin  $M(x_0, y_0)$  noktasındaki teğetin denklemi:

$t: y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$



**Örnek 1.**  $f(x) = 5x - x^2$  eğrisinin  $x=1$  apsisi  $M$  noktasındaki teğetin denklemini yazınız.

**Çözüm:** İlk olarak, teğetin değme noktasının  $M(x_0, y_0)$  koordinatlarını belirtelim. Ödevin şartına göre  $x_0=1$  ve  $y_0 = f(x_0) = f(1) = 5 \cdot 1 - 1^2 = 5 - 1 = 4$ 'tür.

Dolayısıyla, teğetin değme noktası  $M(1,4)$ 'tür.

Herhangi bir  $x$  noktasındaki türev:

$$f'(x) = (5x - x^2)' = 5(x)' - (x^2)' = 5 \cdot 1 - 2x = 5 - 2x.$$

$M(1,4)$  noktasındaki teğetin eğimi  $k_t = f'(1) = 5 - 2 \cdot 1 = 5 - 2 = 3$ 'tür.

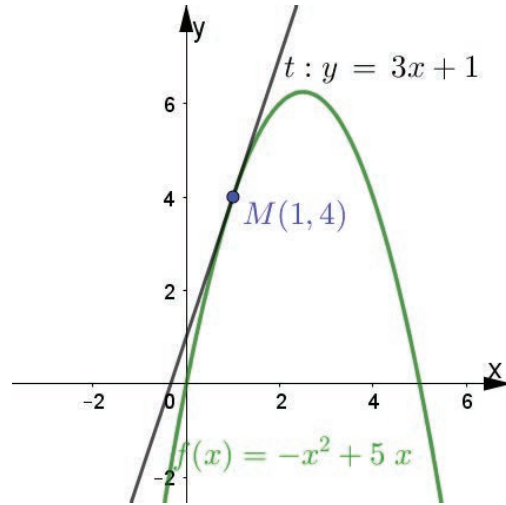
$x_0=1, y_0=4$  ve  $f'(x_0)=3$  değerlerini teğet denklemi  $t$ 'ye yerine koyarsak:

$$y - 4 = 3(x - 1)$$

$$y - 4 = 3x - 3$$

$$y = 3x - 3 + 4, \text{ yani}$$

$$y = 3x + 1 \text{ teğetin denklemdir.}$$



**Örnek 2.**  $y = x^3 + 2x^2 - 1$  eğrisinin hangi noktasında teğetin eğimi 4'tür?

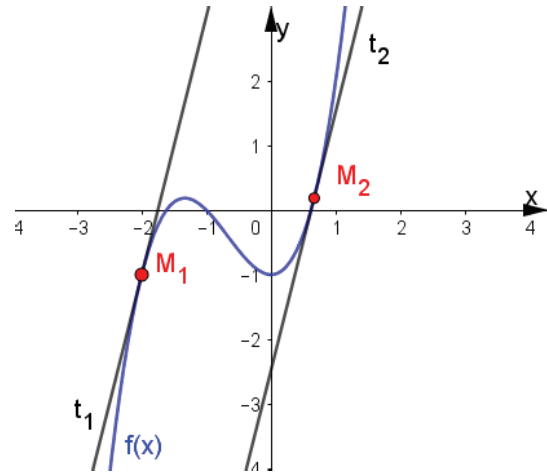
**Çözüm:** Ödevin şartına göre  $k_t=4$ 'tür.

Teğet noktasının  $M(x_0, y_0)$  koordinatlarını belirlememiz gerekiyor. Teğet noktasının apsisi  $x_0$ ,  $k_t=f'(x_0)$  şartından belirlenecektir.

Fonksiyonun türevi:

$$y' = (x^3 + 2x^2 - 1)' = 3x^2 + 4x \text{ ve } x_0 \text{ 'da } f'(x_0) = 3x_0^2 + 4x_0 \text{ 'dır ve}$$

$$4 = 3x_0^2 + 4x_0 \text{ eşitliğini elde ederiz, yani } 3x_0^2 + 4x_0 - 4 = 0.$$





Elde edilen ikinci dereceden denklemi çözüyoruz,

$$x_{0_{1/2}} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm 8}{6}, \text{ buradan } x_{0_1} = -2 \text{ ve } x_{0_2} = \frac{2}{3} \text{ elde ederiz.}$$

Şimdi  $y_0$  koordinatlarını belirtebiliriz.

1)  $y_{0_1} = f(x_{0_1}) = f(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 - 1 = -8 + 8 - 1 = -1$ , yani aranan nokta  $M_1(-2, -1)$ 'dir. Teğetin denklemi  $y - (-1) = 4(x - (-2))$  veya düzenlenmiş teğet denklemi  $t_1, y = 4x + 7$ 'dir.

2)  $y_{0_2} = f(x_{0_2}) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{8}{27} + \frac{8}{9} - 1 = \frac{5}{27}$ , yani aranan nokta  $M_2\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{27}\right)$ 'dir.

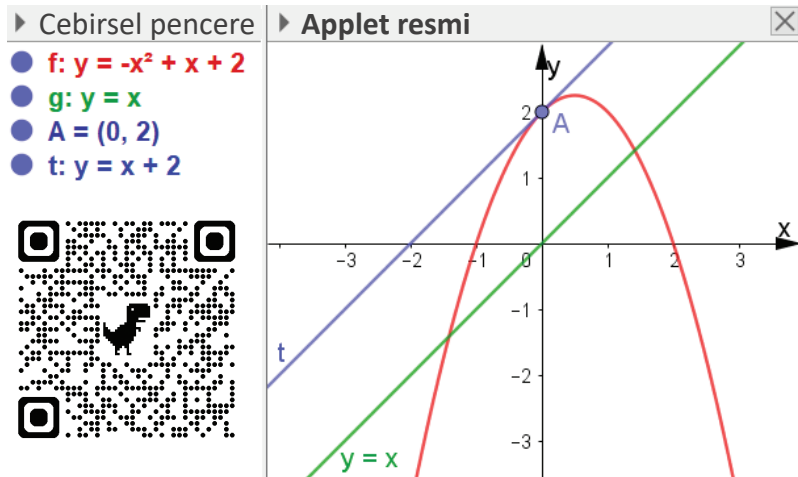
Teğetin denklemi  $y - \frac{5}{27} = 4\left(x - \frac{2}{3}\right)$  veya teğetin denklemi  $t_2: y = 4x - \frac{67}{27}$ 'dir, yani genel biçimde  $108x - 27y - 67 = 0$ 'dır.

**Not:** İki teğet birbirine paraleldir, çünkü aynı eğim  $k_t = 4$ 'e sahiptirler.

Problemleri çözerken önce teğet denklemi için bir applet oluşturabilir ve ardından animasyonlarla cebirsel olarak hesaplamamız gereken çözüme ulaşabiliriz.

**Örnek 3.**  $y = -x^2 + x + 2$  eğrisinin ilk ve üçüncü çeyreklerin açığına paralel olan teğetinin denklemini bulun.

**Çözüm:** İlk olarak, GeoGebra'da öğrencilerin deneme yanılma yoluyla çözüme ulaşabilecekleri bir applet oluşturduk. Eğri üzerindeki keyfi bir noktada bir teğet oluşturuyoruz ve ardından noktayı hareket ettirerek teğetin verilen  $y=x$  doğrusuna ne zaman paralel olacağını kontrol ediyoruz.



<https://www.geogebra.org/m/kwsj9c6n>

Sorunun koşuluna göre, teğetin birinci ve üçüncü dördlün simetri eksenini olan  $y = x$ 'e paralel olması gerektiğinden  $k_1 = 1$  elde edilir.

Teğetin değme noktasının  $A(x_0, y_0)$  koordinatlarını belirlememiz gerekiyor.

Teğetin değme noktasının apsisini  $k_1 = f'(x_0)$  koşulundan belirleyeceğiz.

Fonksiyonun türevi  $y' = (-x^2 + x + 2)' = -2x + 1$ 'dir ve  $x_0$ 'da  $f'(x_0) = -2x_0 + 1$ 'dir ve şu eşitliği elde ederiz:

$$1 = -2x_0 + 1, \text{ yani } x_0 = 0.$$

Şimdi  $y_0$  koordinatını da belirleyebiliriz:

$y_0 = f(x_0) = f(0) = -0^2 + 0 + 2 = 2$ , yani aranan nokta  $A(0, 2)$ 'dir. Teğetin denklemi  $y - 2 = 1 \cdot (x - 0)$  veya düzenlenmiş teğetin denklemi  $t: y = x + 2$ 'dir. Bu da applet ile elde edilen çözümü doğrular.

**Örnek 4.**  $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 3$  eğrisine  $p: x + 3y - 4 = 0$  doğrusuna dik olan teğetin denklemini bulunuz.

$$k_t = -\frac{1}{k_p}$$

**Çözüm:** İki doğrunun dikliği koşulundan  $k_t \cdot k_p = -1$ , yani  $k_t = -\frac{1}{k_p}$  elde edilir.

$p$  doğrusunun katsayısını  $p: x + 3y - 4 = 0$  doğrusunu dönüştürerek elde edeceğiz.

Şu sonucu elde ederiz:

$$3y = -x + 4, \text{ yani } y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3},$$

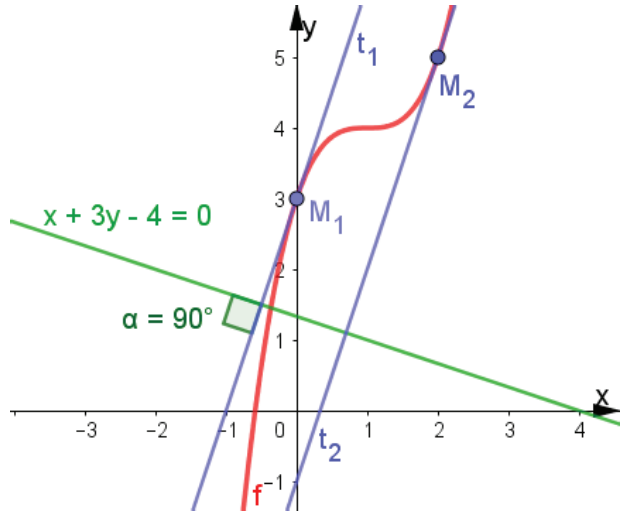
Doğrunun eğim katsayısı  $k_p = -\frac{1}{3}$  dir.

Teğetin eğim katsayısı  $k_t = -\frac{1}{-\frac{1}{3}} = 3$  'tür.

Teğetin değme noktası  $M(x_0, y_0)$ 'ı önceki örnekteki gibi belirleyeceğiz.

Teğetin değme noktasının apsisini  $k_1 = f'(x_0)$  koşulundan belirleyeceğiz.

Fonksiyonun türevi  $y' = (x^3 - 3x^2 + 3x + 3)' = 3x^2 - 6x + 3$ 'tür ve  $x_0$ 'da  $f'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 + 3$ 'tür ve şu eşitliği elde ederiz:  $3 = 3x_0^2 - 6x_0 + 3$ , yani  $3x_0^2 - 6x_0 = 0$ .



Elde edilen denklemi  $3x_0(x_0 - 2) = 0$  biçiminde yazarak  $x_0 = 0$  ve  $x_0 = 2$  çözümlerini elde ederiz. İki çözüm elde ettik, yani verilen doğruya teğetlerin dik olacağı iki nokta vardır.

Şimdi  $y_0$  koordinatlarını da belirleyebiliriz.

1)  $y_{0_1} = f(x_{0_1}) = f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 3 = 3$  yani aranan nokta  $M_1(0, 3)$ 'tür. Teğetin denklemi  $y - 3 = 3(x - 0)$  veya düzenlenmiş teğetin denklemi  $t_1: y = 3x + 3$ 'tür.

2)  $y_{0_2} = f(x_{0_2}) = f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 3 = 5$ , yani aranan nokta  $M_2(2, 5)$ 'tir. Teğetin denklemi  $y - 5 = 3(x - 2)$  veya daha sade şekilde getirerek denklem  $t_2: y = 3x - 1$  elde edilir.

### NORMALİN DENKLEMİ

$y = f(x)$  fonksiyonu ve fonksiyonun  $M(x_0, f(x_0))$  noktası verilsin.

$M(x_0, f(x_0))$  noktasından geçen ve eğriye bu noktadaki teğete dik olan doğruya  $y = f(x)$  eğrisinin  $M$  noktasındaki normali denir.

Normalin eğim katsayısı  $k_n = -\frac{1}{f'(x_0)}$  olduğundan,  $M(x_0, y_0)$  noktasındaki diferansiyellenebilir  $y = f(x)$  fonksiyonunun normal denklemi şu şekildedir:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Grafiksel olarak çizimde gösterilmiştir.

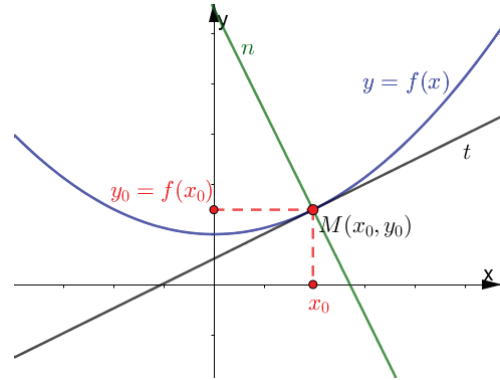
$x_0$  ve  $y_0 = f(x_0)$  koordinatlarına sahip  $M$  noktasında diferansiyellenebilir  $y = f(x)$  fonksiyonunun grafiğinin normal denklemi şudur:

$$n: y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

**Örnek 1.**  $f(x) = 5x - x^2$  eğrisinin  $x = 1$  apsisli  $M$  noktasındaki normal denklemini yazınız.

**Çözüm:** Öncelikle  $M(x_0, y_0)$  noktasının koordinatlarını belirleriz. Sorunun koşuluna göre  $x_0 = 1$  ve  $y_0 = f(x_0) = f(1) = 5 \cdot 1 - 1^2 = 5 - 1 = 4$ 'tür.

Bu nedenle fonksiyonun  $M(1, 4)$  noktası elde edilir.



Herhangi bir noktadaki türevi:

$$f'(x) = (5x - x^2)' = 5(x)' - (x^2)' = 5 \cdot 1 - 2x = 5 - 2x \text{ dir.}$$

$M(1, 4)$  noktasındaki türevinin değeri  $f'(1) = 5 - 2 \cdot 1 = 5 - 2 = 3$  tür.

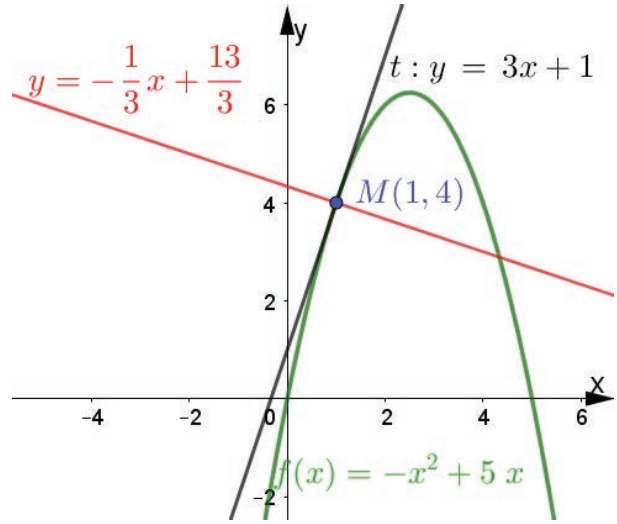
$x_0 = 1$ ,  $y_0 = 4$  ve  $f'(x_0) = 3$  değerlerini  $n$  normalinin denkleminde değiştirmekle şunu elde ediyoruz:

$$y - 4 = -\frac{1}{3}(x - 1)$$

$$y - 4 = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + 4, \text{ yani normalinin denklemleri}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3} \text{ elde edilir.}$$



**Not:**  $f(x) = 5x - x^2$  fonksiyonunun  $y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$  normali  $M(1, 4)$  noktasında, aynı noktadaki  $y = 3x + 1$  teğetine diktir.

**Örnek 2.**  $y = \frac{8}{4 + x^2}$  eğrisinin  $x_0 = 2$  apsisli noktasındaki teğet ve normalinin denklemini bulunuz.

**Çözüm:**  $x_0 = 2$  için şunu elde ederiz:

$$y_0 = f(x_0) = f(2) = \frac{8}{4 + 2^2} = \frac{8}{8} = 1, \text{ yani } M(2, 1) \text{ noktası elde edilir.}$$

Fonksiyonun türevini bulalım:

$$y' = \left( \frac{8}{4 + x^2} \right)' = 8 \left( (4 + x^2)^{-1} \right)' = 8 \cdot (-1) \cdot (4 + x^2)^{-2} \cdot (2x) = -\frac{16x}{(4 + x^2)^2}.$$

Daha sonra,  $x_0 = 2$  noktasındaki fonksiyonun türevini buluyoruz, yani:

$$f'(x_0) = f'(2) = -\frac{16 \cdot 2}{(4 + 2^2)^2} = -\frac{32}{64} = -\frac{1}{2}.$$

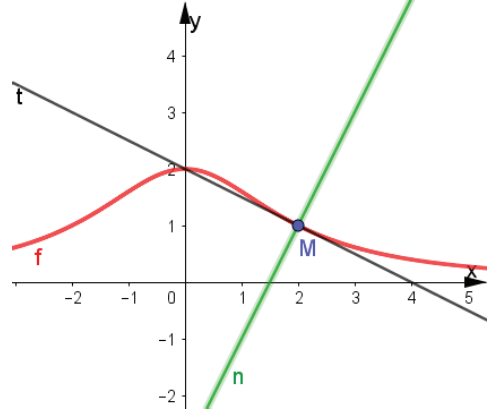
$M(2,1)$  noktasındaki teğetin denklemi:

$$y-1 = -\frac{1}{2}(x-2), \text{ yani } y = -\frac{1}{2}x + 2 \text{ dir.}$$

Normalin denklemi ise:

$$y-1 = -\frac{1}{-\frac{1}{2}}(x-2), \text{ yani } y = 2x-3.$$

Yandaki şekilde fonksiyonun teğet ve normal gösterilmiştir.



**Örnek 3.**  $f(x) = 2x^2 - 3x$  eğrisinin  $x_0 = 1$  apsisli noktasındaki teğet ve normal denklemini bulunuz.

**Çözüm:**  $f(x) = 2x^2 - 3x$  fonksiyonunda  $x_0 = 1$  yerine koyarsak,  $f(1) = 2 - 3 = -1$  elde ederiz.

Türevi  $f'(x) = 4x - 3$  bulunduktan sonra,  $x_0 = 1$  yerine koyarsak,  $y'_0 = f'(1) = 4 - 3 = 1$  elde ederiz.

Teğet denklemi formülünü kullanarak,  $y - (-1) = (x - 1)$  elde edilir. Bunun sadeleştirilmiş şekli  $t: y = x - 2$  dir.

Normalin denklemi formülüne yerine koyarsak,  $y - (-1) = -\frac{1}{1}(x - 1)$ , sadeleştirdikten sonra  $n$ : normalinin denklemi  $y = -x$  olduğunu elde ederiz.

#### Alıştırma Problemleri:

1.  $y = \frac{1}{x^2}$  fonksiyonunun  $x = 1$  apsisli noktasındaki teğetin denklemini yazın.
2.  $y = \sqrt{x}$  eğrisinin  $x$ - eksenin pozitif yönü ile  $45^\circ$  açı yapan teğetini bulunuz.
3.  $y = x^2 + x$  eğrisinin,  $y = -\frac{1}{2}x + 5$  doğrusuna dik olan teğetin denklemini bulunuz.
4.  $y = -x^2 + x + 2$  eğrisinin hangi noktalarında teğeti:
  - a)  $x$  eksenine paraleldir?
  - b) birinci ve üçüncü dördölün simetrisine paraleldir?

5.  $y = x^2 + 5x - 1$  eğrisinin  $x = 1$  apsisli noktasındaki normalinin denklemini yazınız.
6.  $y = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$  fonksiyonunun şu noktadaki teğet ve normalinin denklemlerini yazınız:
- a)  $A(2, 3)$
  - b)  $B(-1, 0)$
  - c)  $C(3, 0)$
7.  $y = x \ln x$  eğrisinin  $y = x + 5$  doğrusuna paralel olan normalinin denklemini bulunuz.
8.  $y = x^2 + 2x + 5$  eğrisinin teğet ve normalinin eğimini bulunuz:
- a)  $x = 1$  apsisli noktada,
  - b)  $y = \frac{13}{2}$  ordinatlı noktada.
9.  $y = \ln x$  eğrisinin teğeti hangi noktalarda:
- a)  $y = -2x + 1$  doğrusuna diktir,
  - b)  $2x - y - 1 = 0$  doğrusuna paraleldir.
10.  $y = 3x^2 - 4x + 1$  ve  $y = x^3 - x - 1$  eğrilerinin teğetlerinin paralel olduğu aynı apsisli noktaları bulunuz.

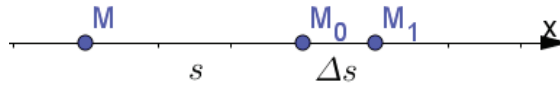
## 7. TÜREVİN FİZİKTE UYGULAMASI

Bir araba, Veles'ten Üsküp'e olan mesafeyi  $80 \text{ km/saat}$  hızla katedildiğini söylersek, bu durumda arabanın hangi ortalama hızla hareket ettiği “anlaşılır”.

Aşağıda fizikten bazı örnekleri inceleyeceğiz.

$s$  ile  $p$  doğrusu boyunca  $M$  maddi noktasının katettiği yolu gösterirsek,  $M$  noktasının zamana bağlı konumu  $s = f(t)$  fonksiyonu ile belirlenir, bu fonksiyon fizikte cisimlerin hareket kanunu olarak bilinir.

$t$  anında nokta  $M_0$  konumundadır ve katettiği yol  $s_0 = f(t)$  Zaman  $t + \Delta t$  olarak değiştiğinde,  $M_0$  noktası  $M_1$  konumuna gelir ve katettiği yol  $s_1 = f(t + \Delta t)$  olur.  $\Delta t$  zaman aralığında  $M$  noktasının katettiği yol  $\Delta s = s_1 - s_0$  veya  $\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$ 'dir.



Maddi noktanın hızı, hareketli bir noktanın (cismin) ortalama hızı olarak bilinen ve  $v$  ile gösterilen şu formülle tanımlanır:  $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$

Düzgün doğrusal harekette  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$  oranı, yani maddi noktanın ortalama hızı sabittir.

Maddi noktanın hareketi düzgün doğrusal değilse, hız her an değişir.  $\Delta t$  zaman artışı yeterince küçükse,  $t$  anındaki ilgili ortalama hız, cismin anlık (gerçek) hızına yeterince yakın olacaktır, bu hız anlık hız denir.

$s = f(t)$  hareket yasasına göre,  $t$  anındaki anlık hız,  $\Delta t \rightarrow 0$  olduğunda mevcutsa, ortalama hızın limit değeridir, yani:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{sr} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t).$$

$s = f(t)$  kanununa göre hareket eden maddi noktanın (cismin) anlık hızının,  $f(t)$  fonksiyonunun  $t$  anındaki  $t_0$  değişkenine göre türevinin değerine eşit olduğunu elde ettik, yani  $v = f'(t_0)$  dir.

$t$  anlık hızın  $v = f'(t)$  ile tanımlandığı zaman olsun.  $\Delta t$  zaman değişimine karşılık gelen hız değişimini  $\Delta v = f'(t + \Delta t) - f'(t)$  olarak tanımlayabiliriz.

Fizikten biliyoruz ki,  $\frac{\Delta v}{\Delta t}$  oranı,  $[t, t + \Delta t]$  aralığındaki maddi noktanın ortalama ivmesini verir ve  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ,  $t$  anındaki  $a$  ile gösterilen anlık ivmedir, yani  $a = v' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f'(t + \Delta t) - f'(t)}{\Delta t} = f''(t)$  dir.

$s = f(t)$  kanununa göre hareket eden maddi noktanın (cismin) ivmesinin,  $t$  anındaki  $t_0$  değışikine göre  $f(t)$  fonksiyonunun ikinci türevinin değeriine eşit olduğunu elde ettik, yani  $a = f''(t_0)$ .

**Örnek 1.** Bir cisim  $s(t) = t^3 - 6t^2 + 12t$  kanununa göre doğrusal hareket ediyor, burada  $S$  metre ve  $t$  saniye cinsinden ölçölüyor. Üçüncü saniyenin sonunda  $t = 3s$ , cismin hızını ve ivmesini bulunuz.

**Çözüm:** Problemin koşulundan  $t = 3s$ .

Fonksiyonun türevlerini bulalım ve  $t$  değeriini yerine koyalım.

Birinci türev  $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 12$ 'dir ve  $t$  değeriini yerine koyduğumuzda  $v(3) = s'(3) = 27 - 36 + 12 = 3$  elde ederiz, yani  $v = 3 \text{ m/s}$ .

İkinci türev  $a(t) = v'(t) = 6t - 12$ 'dir ve  $t$  değeriini yerine koyduğumuzda  $a(3) = v'(3) = 18 - 12 = 6$  elde ederiz, yani  $a = 6 \text{ m/s}^2$  dir.

**Örnek 2.** Bir cismin serbest düşüşünde katettiğı yolun  $s = \frac{1}{2}gt^2$  formölüyle bulunduğı bilinmektedir, burada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  yerçekimi ivmesidir.  $t = 5s$  süresince serbest düşüşte cismin hızını ve ivmesini bulunuz.

**Çözüm:** Fonksiyonun ilk iki türevi  $s' = gt$  ve  $s'' = g$ 'dir.

$t = 5s$  anında hız  $v(5) = s'(5) = g \cdot 5 = 9.81 \cdot 5 = 49.05 \text{ m/s}$  olacaktır, bu da beşinci saniyenin sonunda cismin hızının  $49.05 \text{ m/s}$  olacağı anlamına gelir.

$t = 5s$  anında ivme  $a(5) = s''(5) = g = 9.81 \text{ m/s}^2$  olacaktır, bu da serbest düşüşte ivmenin her zaman sabit olduğu ve  $9.81 \text{ m/s}^2$  olduğu anlamına gelir.

### Alıştırma Problemleri:

1. Bir cisim  $s(t) = 4t^3 - 4t^2 + 5$  yasasına göre doğrusal hareket ediyor. Şu zamanlarda cismin hızını ve ivmesini bulun: a)  $t = 2s$  b)  $t = 10s$



2. Bir cismin serbest düşüşünde katettiği yolu  $s = \frac{1}{2}gt^2$  formülüyle bulunduğu bilinmektedir, burada  $g = 9.81\text{ m / s}^2$  yerçekimi ivmesidir. Şu zaman değerleri için, cismin hızını ve ivmesini bulunuz:  
  
a)  $t = 3\text{s}$ ,                                      b)  $t = 1\text{s}$ .
3. Aynı noktadan iki cisim  $s_1 = t^3 - 2t^2 + 5$  ve  $s_2 = \frac{t^3}{3} - 2t + 1$  kanunlarına göre hareket etmeye başlıyor. İki cismin de aynı hızla hareket edeceği anı bulunuz.
4. Bir maddi nokta  $s = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$  kanununa göre, doğrusal harekette bulunuyor.  
  
a) Noktanın herhangi bir  $t$  anındaki hızını bulunuz.  
  
b) Noktanın durduğu anı bulunuz.
5. Bir cismin yol kanunu  $s = \frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + t$  denklemiyle verilmiştir. Cismin hızının  $5\text{ m / s}$  olacağı anı bulunuz.

## 8. TÜREVİN UYGULANMASI. FONKSİYONUN DEĞİŞİMİ VE GRAFİĞİNİN İNCELENMESİ

## FONKSİYONUN MONOTONLUĞUNUN İNCELENMESİ

Bir fonksiyonun monotonluk kavramı, yani bir fonksiyonun artması ve azalmasıyla ikinci modüler ünite de tanıştık.

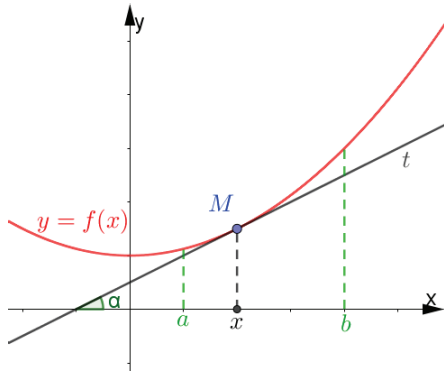
Monotonluk tanımını hatırlayalım.

**Tanım.** Tanım kümesi  $D_f$  olan ve tanım kümesine ait  $(a, b)$  aralığında verilen bir  $f(x)$  fonksiyonu için:

- Herhangi  $x_1, x_2 \in (a, b)$  için  $x_1 < x_2$  olduğunda  $f(x_1) < f(x_2)$  ise,  $f(x)$  fonksiyonu  $(a, b)$  aralığında kesin anlamda **monoton artandır** denir;
- Herhangi  $x_1, x_2 \in (a, b)$  için  $x_1 < x_2$  olduğunda  $f(x_1) > f(x_2)$  ise,  $f(x)$  fonksiyonu  $(a, b)$  aralığında kesin anlamda **monoton azalandır** denir.

Şimdi bir fonksiyonun türevi yardımıyla fonksiyonun monotonluğunu nasıl inceleyeceğimizi göreceğiz.

$y = f(x)$  ve  $y = g(x)$  fonksiyonları sırasıyla  $(a, b)$  ve  $(c, d)$  aralıklarında verilmiş olsun.



Çizimde,  $(a, b)$  aralığında artan bir fonksiyonun grafiği olan  $y = f(x)$  eğrisinin  $M$  noktasındaki teğetin,  $x$ - ekseninin pozitif kısmı ile dar bir açı yaptığını, yani  $\tan \alpha > 0$  olduğunu görüyoruz.

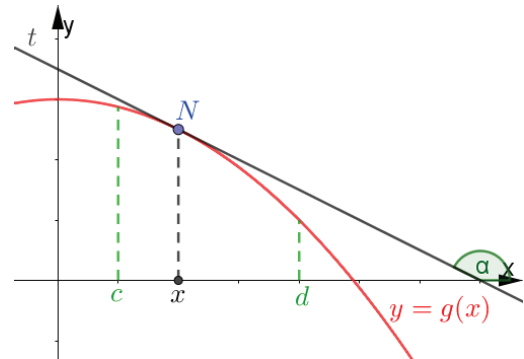
Teğetin eğim katsayısı tanımından, her  $x \in (a, b)$  için,

$$f'(x) = k_t = \tan \alpha > 0 \text{ gerekir.}$$

Çizimde,  $(c, d)$  aralığında azalan bir fonksiyonun grafiği olan  $y = g(x)$  eğrisinin  $N$  noktasındaki teğetin,  $x$  ekseninin pozitif kısmı ile geniş bir açı yaptığını, yani  $\tan \alpha < 0$  olduğunu görüyoruz.

Teğetin eğim katsayısı tanımından, her  $x \in (c, d)$  için,

$$g'(x) = k_t = \tan \alpha < 0 \text{ gerekir.}$$



Şimdi aşağıdaki tanımı ifade edebiliriz:

**Tanım.**  $(a, b)$  aralığındaki her noktada türevlenebilir olan  $y = f(x)$  fonksiyonu,

- her  $x \in (a, b)$  için  $f'(x) > 0$  ise,  $(a, b)$  aralığında kesin anlamda **monoton artandır**.
- her  $x \in (a, b)$  için  $f'(x) < 0$  ise,  $(a, b)$  aralığında kesin anlamda **monoton eksilendir**.
- eğer her  $x \in (a, b)$  için  $f'(x) = 0$  ise,  $(a, b)$  aralığında sabittir.

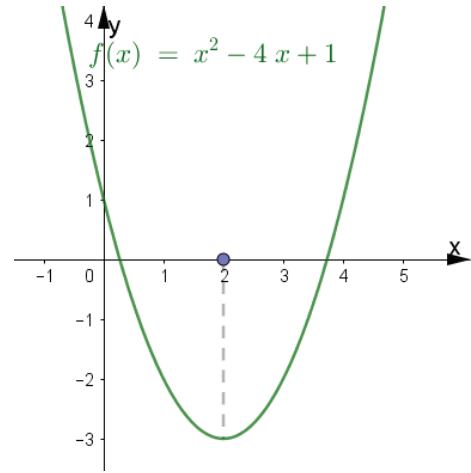
**Örnek 1.**  $f(x) = x^2 - 4x + 1$  fonksiyonunun monotonluğunu inceleyiniz.

**Çözüm:**  $f(x) = x^2 - 4x + 1$  fonksiyonunun tanım kümesi  $D_f = \mathbb{R}$ 'dir. Fonksiyonun türevini buluyoruz,  $f'(x) = 2x - 4$ .

Fonksiyonun artan olduğu aralığı belirlemek için  $f'(x) > 0$  eşitsizliğini çözüyoruz,  $2x - 4 > 0$  elde ederiz, buradan  $x > 2$ , yani  $x \in (2, +\infty)$  olduğu sonucu elde edilir.

Fonksiyonun azalan olduğu aralığı belirlemek için  $f'(x) < 0$  eşitsizliğini çözüyoruz, yani  $2x - 4 < 0$ , buradan  $x < 2$ , yani  $x \in (-\infty, 2)$  olduğu sonucu çıkar.

Yani, fonksiyon  $x \in (2, +\infty)$  için **artar** ve  $x \in (-\infty, 2)$  için **azalır**.



**Örnek 2.**  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$  fonksiyonunun monotonluğunu inceleyiniz.

**Çözüm:**  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$  fonksiyonunun tanım kümesi  $D_f = \mathbb{R}$ 'dir. Fonksiyonun türevi  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ 'dur.

Fonksiyonun artan olduğu aralığı belirlemek için  $f'(x) > 0$  eşitsizliğini çözüyoruz, buradan  $3x^2 - 12x + 9 > 0$  olduğu sonucu çıkar.

$3x^2 - 12x + 9 = 0$  denkleminin çözümleri  $x_1 = 1$  ve  $x_2 = 3$ 'tür. İkinci dereceden bir terimi çarpanlara ayırma prosedürünü kullanarak  $3(x-1)(x-3) > 0$  eşitsizliğini elde ederiz.

$x-1$  ve  $x-3$  ifadelerinin işareti:

$x - 1 > 0$  (ifade pozitifdir),  $x > 1$  için ve  $x - 1 < 0$  (ifade negatiftir),  $x < 1$  için.

$x - 3 > 0$ ,  $x > 3$  için ve  $x - 3 < 0$ ,  $x < 3$  için.

Sonuçları yardımcı bir tabloya girebilir ve birinci türevin işaretini belirleyebiliriz. İfadenin pozitif olduğu her aralığın sütununa "+" yazarız ve ifadenin negatif olduğu aralıkların sütununa "-" yazarız.

| $xx$                      | $-\infty$      | 1          | 3              | $+\infty$ |
|---------------------------|----------------|------------|----------------|-----------|
| aralık                    | $(-\infty, 1)$ | $(1, 3)$   | $(3, +\infty)$ |           |
| $x - 1$                   | -              | +          | +              |           |
| $x - 3$                   | -              | -          | +              |           |
| $f'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$ | +              | -          | +              |           |
| monotonluk                | $\nearrow$     | $\searrow$ | $\nearrow$     |           |

Tablodaki  $f'(x)$  türevinin işareti,  $x - 1$  ve  $x - 3$  çarpanlarının işaretlerinin çarpımıyla elde edilir. 3 pozitif sayı olduğu için, çarpımın işaretini değiştirmez.

$f'(x)$  işaretine bağlı olarak şunu elde ederiz:

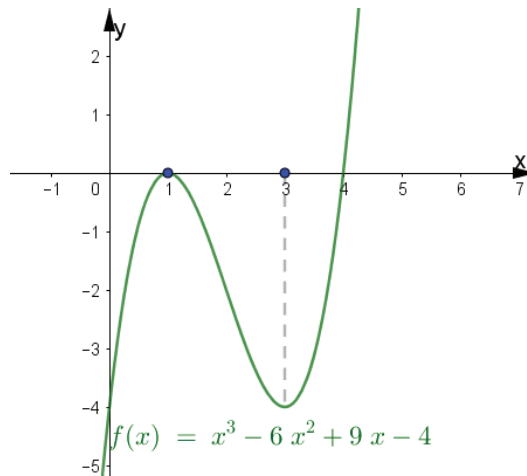
eğer işaret "+", yani  $f'(x) > 0$  ise, fonksiyonun arttığı bir aralık elde ederiz, eğer işaret "-", yani  $f'(x) < 0$  ise, fonksiyonun azaldığı bir aralık elde ederiz.

Tablodan şunu okuyabiliriz:

$y = f(x)$  fonksiyonu  $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$  aralığında monoton olarak artar.

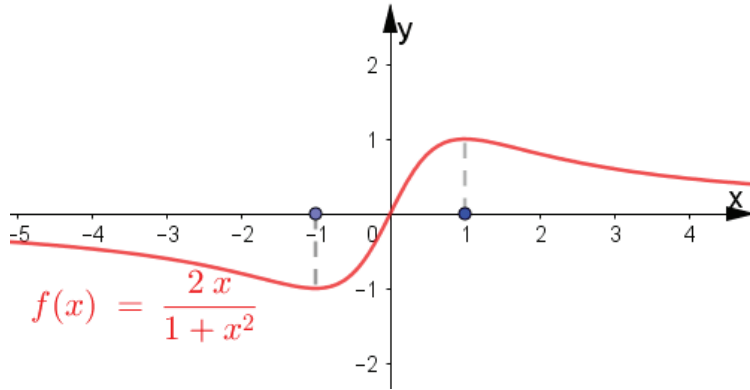
$y = f(x)$  fonksiyonu  $(1, 3)$  aralığında monoton olarak azalır.

Çizimde, monotonluk aralıklarıyla birlikte fonksiyon grafiksel olarak temsil edilmiştir.



Örnek 3.  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$  fonksiyonunun monotonluğunu inceleyiniz.

**Çözüm:** Fonksiyon çizimde grafiksel olarak gösterilmiştir.



$y = f(x)$  fonksiyonu  $(-1,1)$  aralığında monoton artandır.

$y = f(x)$  fonksiyonu  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  aralığında monoton azalandır.

#### Alıştırma Problemleri:

1. Fonksiyonların arttığı veya azaldığı aralıkları bulunuz:

a)  $f(x) = 1 - x^2$

b)  $f(x) = (x - 3)^2$

c)  $f(x) = x^2 - 2x$

ç)  $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

2. Fonksiyonların arttığı veya azaldığı aralıkları bulunuz:

a)  $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 7$

b)  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 2$

c)  $f(x) = x^4 - 8x^2$

ç)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$

3. Fonksiyonların arttığı veya azaldığı aralıkları bulunuz:

a)  $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

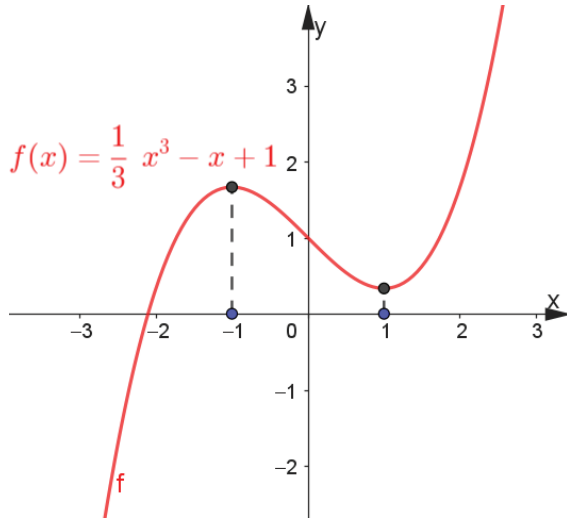
b)  $f(x) = \frac{3x}{x^2 + x + 1}$

$$c) f(x) = \frac{5x^2 + 8x - 1}{x^2 + 1}$$

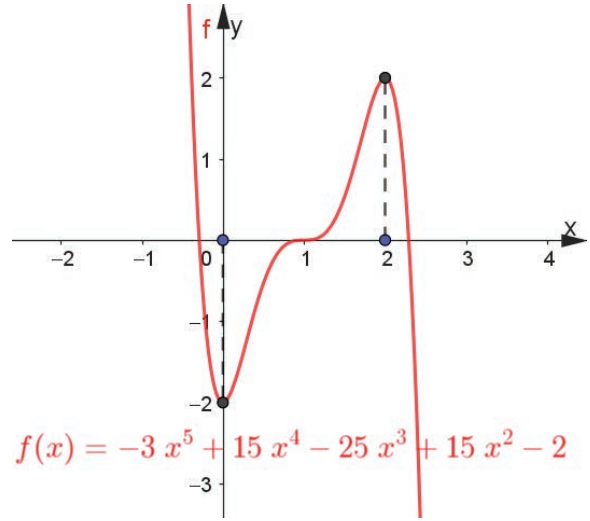
$$g) f(x) = \ln \sqrt{1+x^2}$$

4. verilen fonksiyonların grafiklerini inceleyerek, monotonluk aralıklarını grafikten belirtiniz:

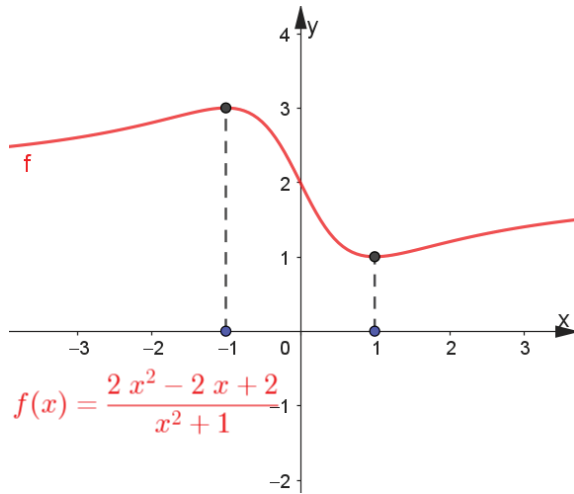
$$a) f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$$



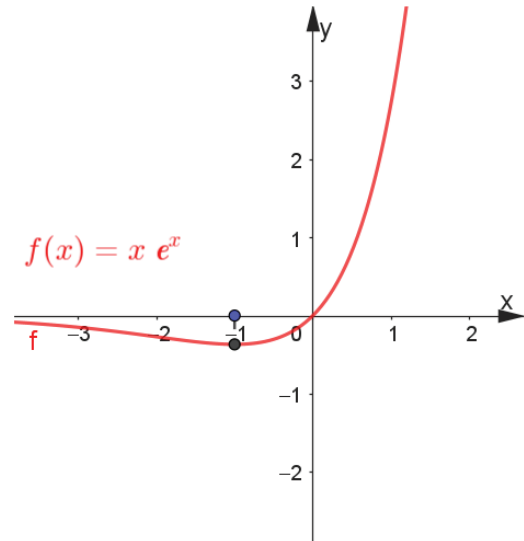
$$b) f(x) = -3x^5 + 15x^4 - 25x^3 + 15x^2 - 2$$



$$c) f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 2}{x^2 + 1}$$



$$c) f(x) = xe^x$$



## FONKSİYONUN EKSTREMUM DEĞERLERİNİN İNCELENMESİ

$(a, b)$  aralığında tanımlı olan  $y = f(x)$  fonksiyonu verilmiş olsun. Fonksiyonun monotonluğunun değiştiği, fonksiyon grafiğinin noktalarına fonksiyonun **ekstremum değerleri** veya **ekstremleri** denir.

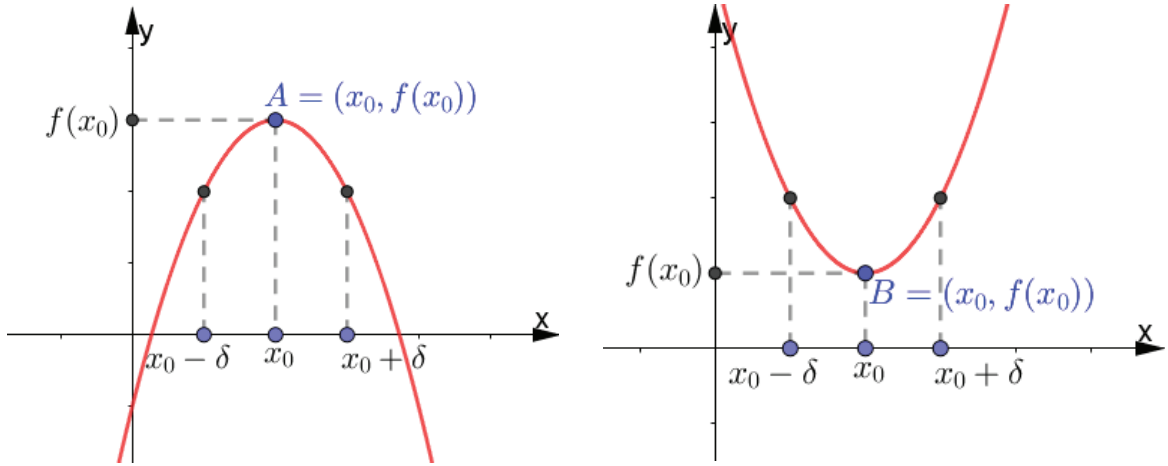
Bu noktaların komşuluğunda, fonksiyonun değerleri yerel olarak en büyük (en küçük) değere ulaşır.

**Tanım.**  $x = x_0$  ve  $x_0 \in (a, b)$  noktasında  $y = f(x)$  fonksiyonu,  $f(x_0)$ 'a eşit yerel bir ekstremi **varsa**,  $x_0$  noktasının  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$   $\delta$  komşuluğu vardır, öyle ki bu komşuluktaki her  $x$  için şunlar geçerlidir:

$f(x_0) \geq f(x)$  ise  $(x_0, f(x_0))$  noktasında yerel bir **maksimum vardır**.

$f(x_0) \leq f(x)$  ise  $(x_0, f(x_0))$  noktasında yerel bir **minimum vardır**.

Çizimde fonksiyon grafiklerinin ekstrem noktaları gösterilmektedir.



Bu ekstrem yerel niteliktedir, çünkü fonksiyon tüm tanım kümesinde en büyük ve en küçük değerlerine ulaşmaz. Bunlar, fonksiyonun değişimine ait arttığandan azaldığına ve tersine değiştiği noktalarıdır.

Aşağıdaki örneklerde, fonksiyonun  $x_0$  noktasının komşuluğunda ve ekstremum değerine sahip olacağımız  $x_0$  noktasındaki türevinin özelliğini inceleyeceğiz.

**Örnek 1.**  $f(x) = -x^2 + 4x$  fonksiyonunun ekstremum değerlerini bulunuz.

**Çözüm:** Fonksiyonun türevini bulalım,  $f'(x) = -2x + 4$ .

$f'(x) > 0$  ise,  $-2x + 4 > 0$ , yani  $x < 2$ . Buradan  $x \in (-\infty, 2)$  için fonksiyonun arttığı sonucuna varılır.  $f'(x) < 0$  ise,  $-2x + 4 < 0$ , yani  $x > 2$ . Buradan  $x \in (2, +\infty)$  için fonksiyonun azaldığı sonucu elde edilir.  $x = 2$  için  $f'(2) = 0$ .

Yani, değişken  $x_0 = 2$  noktasını geçtiğinde, birinci türev işaretini pozitiften negatife değiştirir, bu nedenle fonksiyonun  $x_0 = 2$ 'de bir maksimumu vardır, bu da

$$y_{\max} = f(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 = 4, \text{ yani}$$

$A = (2, 4)$  noktasında fonksiyonun maksimumu vardır  $A_{\max}$ .

**Örnek 2.**  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  fonksiyonunun ekstremum değerlerini bulunuz.

**Çözüm:** Fonksiyonun türevini bulalım,  $f'(x) = x^2 - 4x + 3$ .

$f'(x) > 0$  ise,  $2x - 4 > 0$ , yani  $x > 2$ . Buradan  $x \in (2, +\infty)$  için fonksiyonun arttığı sonucuna varılır.

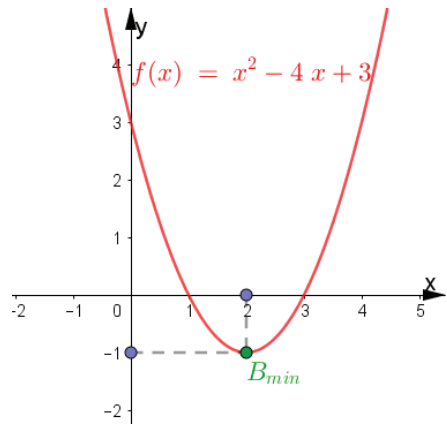
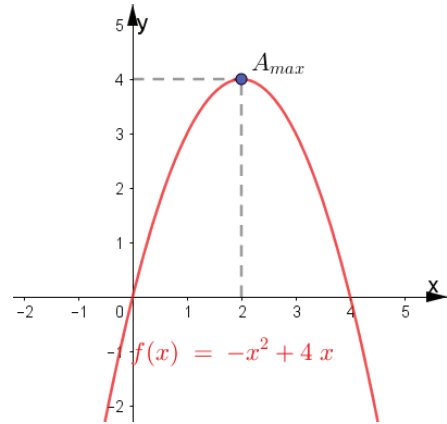
$f'(x) < 0$  ise,  $2x - 4 < 0$ , yani  $x < 2$ . Buradan  $x \in (-\infty, 2)$  için fonksiyonun azaldığı sonucuna varılır.

$$x = 2 \text{ için } f'(2) = 0.$$

Yani, değişken  $x_0 = 2$  noktasından geçtiğinde, birinci türev işaretini negatiften pozitive değiştirir, bu nedenle fonksiyonun  $x_0 = 2$ 'de bir minimumu vardır, bu da

$$y_{\min} = f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1, \text{ yani}$$

$B = (2, -1)$  noktasında fonksiyonun minimumu  $B_{\min}$  noktasıdır.



**Not:**  $y = f(x)$  fonksiyonu  $x_0$  noktasında bir ekstremum değeri varsa, o zaman ya  $f'(x_0) = 0$  ya da mevcut değildir.

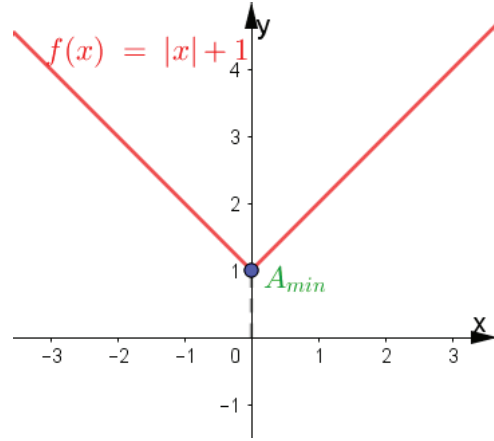
**Örnek 3.**  $f(x) = |x| + 1$  fonksiyonunun ekstremumunu bulunuz.



**Çözüm:** Fonksiyonun grafiği sağda gösterilmiştir.

Fonksiyon  $(-\infty, 0)$  aralığında azalır ve  $(0, +\infty)$  aralığında artar.  $x = 0$  için fonksiyonun değeri  $f(0) = 1$ . Fonksiyonun  $A = (0, 1)$  noktasında bir minimumu vardır.

Ancak fonksiyon  $x = 0$  noktasında türevlenebilir değildir, çünkü soldan  $f'(0) = -1$  ve sağdan  $f'(0) = 1$ 'dir.



**Not:** Devamında, fonksiyonun ekstremum değerine sahip olduğu noktada türevlenebilir olduğu örnekleri inceleyeceğiz.

Önceki örneklerle dayanarak,  $y = f(x)$  fonksiyonunun ekstremlerini belirlediğimiz bir prosedür tanımlayabiliriz.

$y = f(x)$  fonksiyonunun **ekstremum** noktalarını belirleme **kuralı**.

1. Birinci türev  $f'(x)$  belirlenir,  $f'(x) = 0$  denklemleri çözülür ve  $x = x_i$  çözümleri bulunur, eğer varsa  $i = 1, 2, 3, \dots$  için,  $(x_i, f(x_i))$  noktaları belirlenir, bunlar durağan noktalar ve olası ekstremum noktalarıdır.
2.  $x = x_i$  noktasının komşuluğunda  $f'(x)$ 'in işareti incelenir ve:
  - Eğer  $f'(x)$ 'in işareti  $f'(x) < 0$ 'dan (negatiften)  $f'(x) > 0$ 'a (pozitif) değişirse,  $f(x)$  fonksiyonunun  $(x_i, f(x_i))$  noktasında bir minimumu vardır.
  - Eğer  $f'(x)$ 'in işareti  $f'(x) > 0$ 'dan (pozitiften)  $f'(x) < 0$ 'a (negatif) değişirse,  $f(x)$  fonksiyonunun  $(x_i, f(x_i))$  noktasında bir maksimumu vardır.
  - Eğer  $f'(x)$ 'in işareti değişmezse,  $f(x)$  fonksiyonunun  $(x_i, f(x_i))$  noktasında bir ekstremumu yoktur.

**Örnek 4.**  $f(x) = x^2 - 2x - 3$  fonksiyonunun ekstremum değerlerini bulunuz.

**Çözüm:**  $f(x) = x^2 - 2x - 3$  fonksiyonunun birinci türevi  $f'(x) = 2x - 2$ 'dir. Daha sonra, birinci türevi sıfıra eşitleriz  $2x - 2 = 0$  ve durağan noktanın apsisini buluruz  $2x = 2$ , yani  $x = 1$ .

Durağan noktanın ordinatını buluyoruz:

$$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$$

O halde, nokta  $A(1, -4)$ 'tür.

A noktasında fonksiyonun bir ekstremumu olup olmadığını belirlemek için, birinci türevin  $(-\infty, 1)$  ve  $(1, +\infty)$  aralıklarındaki işaretini inceliyoruz.

$x \in (-\infty, 1)$  için birinci türev  $f'(x) < 0$ 'dır, dolayısıyla fonksiyon azalır.

$x \in (1, +\infty)$  için birinci türev  $f'(x) > 0$ 'dır, dolayısıyla fonksiyon artar.

Dolayısıyla  $A(1, -4)$  noktasında  $f(x) = x^2 - 2x - 3$  fonksiyonunun bir minimumu vardır.

**Örnek 5.**  $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$  fonksiyonunun ekstremum noktasını bulunuz.

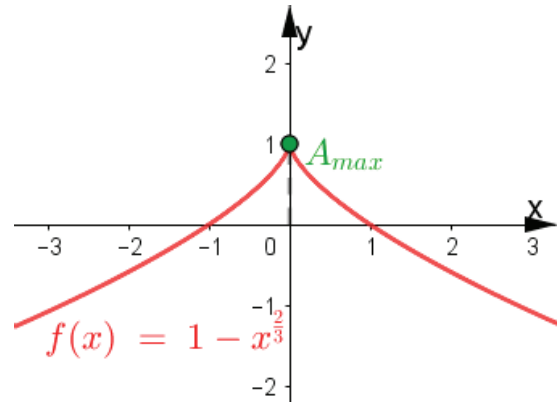
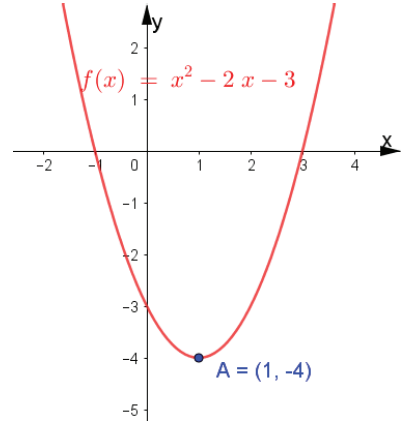
**Çözüm:**  $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$  fonksiyonunun birinci türevini buluyoruz, bu da  $f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ 'dir. Birinci türevi sıfıra eşitliyoruz  $-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0$ , yani  $-2 = 0$  denkleminin çözümü yoktur. Ancak birinci türev  $x = 0$  için mevcut değildir ve fonksiyonun değeri  $f(0) = 1 - \sqrt[3]{0^2} = 1$  dir.  $A(0, 1)$  noktasını elde ettik.

A noktasında fonksiyonun bir ekstremumu olup olmadığını belirlemek için, birinci türevin  $(-\infty, 0)$  ve  $(0, +\infty)$  aralıklarındaki işaretini inceliyoruz.

$x \in (-\infty, 0)$  için birinci türev  $f'(x) > 0$ 'dır, yani fonksiyon artar.

$x \in (0, +\infty)$  için birinci türev  $f'(x) < 0$ 'dır, yani fonksiyon azalır.

Dolayısıyla  $A(0, 1)$  noktasında  $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$  fonksiyonunun bir maksimumu vardır.



**Not:** Örnek 3 ve örnek 5' teki fonksiyonları, ekstremum değerine sahip olduğu noktada türevlenebilir değildir.

$y = f(x)$  fonksiyonu  $x_0$  noktasında iki kez türevlenebilirse, ekstremum değerlerini belirleme kuralı ikinci türev kullanılarak da gerçekleştirilebilir.

$y = f(x)$  fonksiyonunun  $x_0$  noktasında birinci ve ikinci türevi olsun. Birinci türev  $f'(x)$ 'in işaretiyle, fonksiyonun  $x_0$  noktasının komşuluğunda artan ya da azalan olup olmadığını belirleyebiliriz. Benzer şekilde, ikinci türev  $f''(x)$ 'in işaretiyle,  $f'(x)$ 'in  $x_0$  noktasının komşuluğunda arttığını ya da azalmadığını belirleyebiliriz.

$x_0$  noktasında fonksiyonun maksimumu olsun. Bu, fonksiyonun birinci türevinin  $x_0$  noktasının solunda pozitif (çünkü fonksiyon artıyor),  $x_0$  noktasında 0 ve sağında negatif (çünkü fonksiyon azalıyor) olduğu anlamına gelir, dolayısıyla birinci türev azalıyor. Monotonluk tanımından,  $f'(x)$ 'in türevi olan  $f''(x)$ 'in  $x_0$  noktasının komşuluğunda negatif, yani  $f''(x) < 0$  olduğu sonucuna varılır.

Benzer şekilde,  $x_0$  noktasında fonksiyonun minimumu olsun. Bu, fonksiyonun birinci türevinin  $x_0$  noktasının solunda negatif (çünkü fonksiyon azalıyor),  $x_0$  noktasında 0 ve sağında pozitif (çünkü fonksiyon artıyor) olduğu anlamına gelir, dolayısıyla birinci türev artıyor. Monotonluk tanımından,  $f'(x)$ 'in türevi olan  $f''(x)$ 'in  $x_0$  noktasının komşuluğunda pozitif, yani  $f''(x) > 0$  olduğu sonucu elde edilir.

Bu mantığı kullanarak, bir fonksiyonun ekstremum değerlerini belirtmek için başka bir kural yazabiliriz.

$y = f(x)$  fonksiyonunun **ekstremlerini** belirlemek için **ikinci yol**.

1) Birinci türev  $f'(x)$  bulunur,  $f'(x) = 0$  denklemi çözülür ve  $x = x_i$  çözümleri bulunur, eğer varsa  $i = 1, 2, 3, \dots$  için,  $(x_i, f(x_i))$  noktaları belirlenir, bunlar durağan noktalardır ve olası ekstremum noktalarıdır.

2) İkinci türev  $f''(x)$  bulunur ve  $f''(x_i)$  hesaplanır.

Eğer  $f''(x_i) < 0$  ise,  $f(x)$  fonksiyonunun  $(x_i, f(x_i))$  noktasında yerel bir maksimumu vardır.

Eğer  $f''(x_i) > 0$  ise,  $f(x)$  fonksiyonunun  $(x_i, f(x_i))$  noktasında yerel bir minimumu vardır.

Eğer  $f''(x_i) = 0$  ise, ekstremum belirlenemez.

**Örnek 6.**  $f(x) = x^2 - 2x - 3$  fonksiyonunun ekstremum noktalarını bulunuz. (Fonksiyon 4. örnektekiyle aynıdır, ancak şimdi ikinci kurala göre çözeceğiz).

**Çözüm:**  $f(x) = x^2 - 2x - 3$  fonksiyonunun birinci türevini buluyoruz, bu da  $f'(x) = 2x - 2$ 'dir.

Birinci türevi sıfıra eşitliyoruz  $2x - 2 = 0$  ve durağan noktanın apsisini buluyoruz  $2x = 2$ , yani  $x = 1$  elde edilir.

Durağan noktanın ordinatını buluyoruz

$$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4.$$

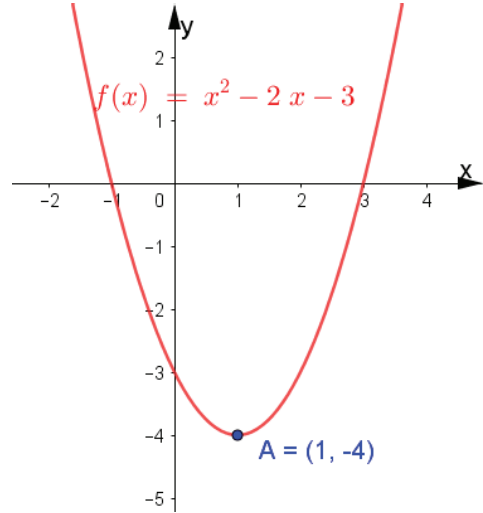
Nokta  $A(1, -4)$ 'tür.

$f''(x) = 2$  fonksiyonunun ikinci türevini buluyoruz.

$x = 1$ 'de ikinci türevin işaretini inceliyoruz,  
 $f''(1) = 2 > 0$ .

Dolayısıyla  $f(x)$  fonksiyonunun  $A(1, -4)$  noktasında bir minimumu vardır.

İncelenen fonksiyonun grafiği çizimde gösterilmiştir.



**Örnek 7.**  $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$  fonksiyonunun ekstremum noktalarını bulunuz.

**Çözüm:**  $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$  fonksiyonunun birinci türevini buluyoruz, bu da

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2 - 3)'(x - 2) - (x^2 - 3)(x - 2)'}{(x - 2)^2} = \frac{2x(x - 2) - (x^2 - 3) \cdot 1}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 4x - x^2 + 3}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}. \end{aligned}$$

Birinci türevi sıfıra eşitliyoruz ve durağan noktaların apsilerini buluyoruz:  $f'(x) = 0$ , yani  $\frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} = 0$ .

Bir kesrin değeri 0'a eşit olmak için sadece payı 0 olmalıdır, yani

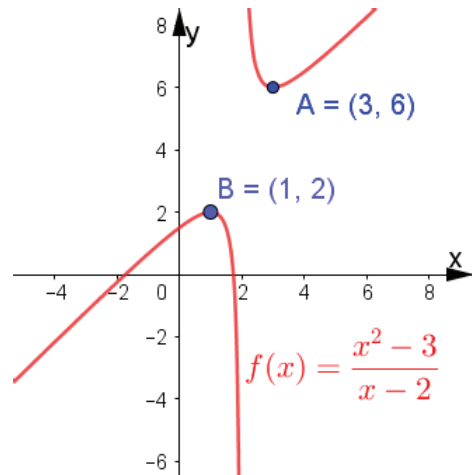
$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Denklemin çözümleri  $x_1 = 3$  ve  $x_2 = 1$ 'dir.

Durağan noktaların ordinatlarını buluyoruz

$$f(3) = \frac{6}{1} = 6 \text{ ve } f(1) = \frac{-2}{-1} = 2.$$

Durağan noktalar  $A(3, 6)$  ve  $B(1, 2)$  olduğunu buluyoruz.



Fonksiyonun ikinci türevini buluyoruz,

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{(x^2 - 4x + 3)'(x-2)^2 - (x^2 - 4x + 3)((x-2)^2)'}{(x-2)^4} = \\
 &= \frac{(2x-4)(x-2)^2 - (x^2 - 4x + 3) \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{(x-2)((2x-4)(x-2) - 2(x^2 - 4x + 3))}{(x-2)^4} = \\
 &= \frac{(x-2)(2x^2 - 4x - 4x + 8 - 2x^2 + 8x - 6)}{(x-2)^4} = \frac{2}{(x-2)^3}
 \end{aligned}$$

Bu noktalardaki ikinci türevin işaretini inceliyoruz:

$$A(3,6) \text{ noktasında, } f''(3) = \frac{2}{(3-2)^3} = 2 > 0,$$

$$\text{ve } B(1,2) \text{ noktasında, } f''(1) = \frac{2}{(1-2)^3} = -2 < 0.$$

Dolayısıyla  $A(3,6)$  noktasında  $f(x)$  fonksiyonunun bir minimumu vardır ve  $B(1,2)$  noktasında  $f(x)$  fonksiyonunun bir maksimumu vardır. Ekstreum noktaları yukarıdaki çizimde grafiksel olarak gösterilmiştir.

### Alıştırma Problemleri:

1. Fonksiyonların ekstreum noktalarını ilk yöntemle bulunuz:

a)  $f(x) = \frac{x^2 - 7}{x + 4}$

b)  $f(x) = x + \frac{1}{x}$

c)  $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$

ç)  $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$

d)  $f(x) = \frac{x-2}{x}$

e)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$

2. Fonksiyonların ekstreum noktalarını ikinci yöntemle bulunuz:

a)  $f(x) = \frac{5-x^2}{x+3}$

b)  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

c)  $f(x) = 1 + x + x^2 - x^3$

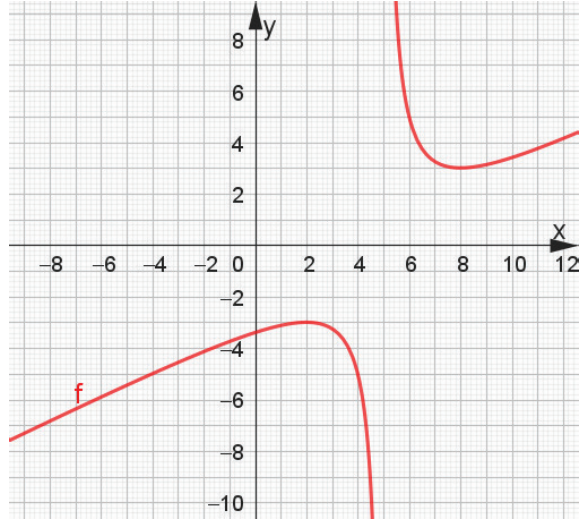
d)  $f(x) = 4 - 9x + 6x^2 - x^3$

ç)  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$

e)  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

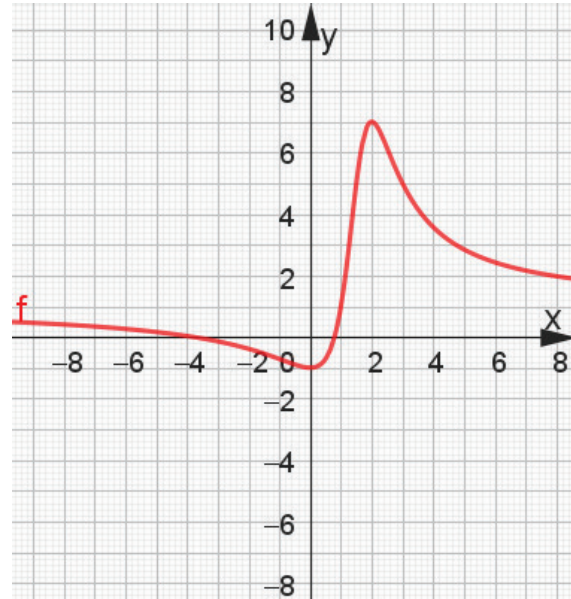
3.  $f(x) = \frac{34 - 10x + x^2}{2x - 10}$

fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını bulunuz ve grafiğe göre (ikinci türevi bulmadan) ne olduklarını (yani, maks. yoksa min.) belirleyiniz. Yerel ekstremum noktaları grafikte işaretleyiniz.



4.  $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 3}{x^2 - 3x + 3}$

fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını bulunuz ve grafiğe göre (ikinci türevi bulmadan) ne olduklarını (yani, maks. yoksa min.) belirleyiniz. Yerel ekstremum noktaları grafikte işaretleyiniz.



## FONKSİYONUN KONVEKSİĞİNİ VE KONKAVLIĞINI İNCELENME. FONKSİYONUN DÖNÜM NOKTALARI

Daha önce, bir fonksiyonun monotonluğunun, birinci türevinin işaretiyle belirlenebileceğini belirledik. İkinci türev, yani işareti, aynı zamanda fonksiyon grafiğinin bir geometrik özelliğiyle, yani fonksiyonun eğriliği (dışbükeylik/içbükeylik) ile de ilişkilidir.

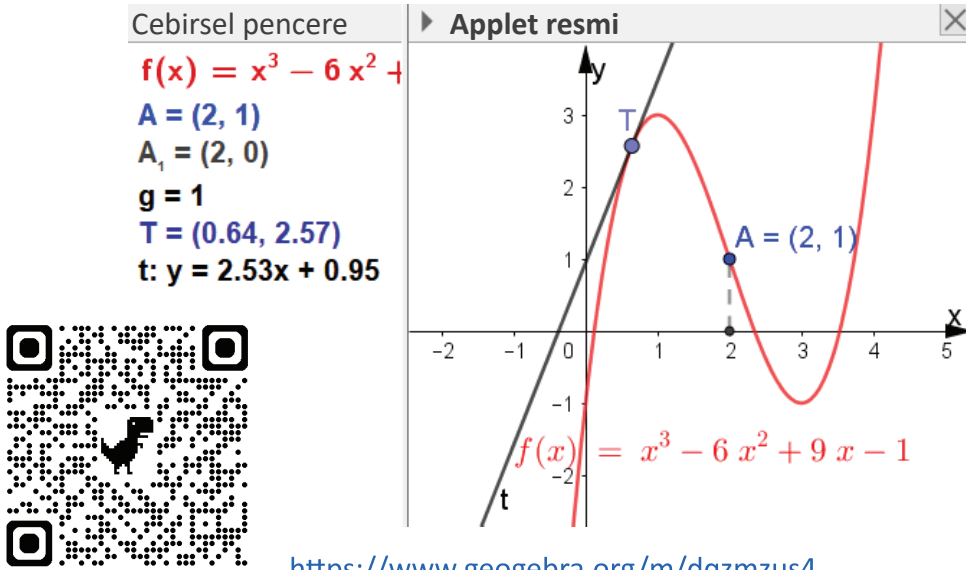
### Tanım.

- $y = f(x)$  fonksiyonu,  $(a, b)$  aralığında, her  $x_0 \in (a, b)$  noktası için, o aralıktaki eğrinin bir kısmı,  $M_0(x_0, f(x_0))$  noktasında çizilen teğetin üzerindeyse, eğri o bölgede **konkav** (içbükey) dir.
- $y = f(x)$  fonksiyonu,  $(a, b)$  aralığında, her  $x_0 \in (a, b)$  noktası için, o aralıktaki eğrinin bir kısmı,  $M_0(x_0, f(x_0))$  noktasında çizilen teğetin altındaysa, eğri o bölgede **konveks** (dışbükey) dir.

Bir fonksiyonun konveksliğini ve konkavlığını türev yardımıyla nasıl belirleriz? Verilen bir  $y = f(x)$  fonksiyonunun konvekslik ve konkavlık aralıklarını belirlemek için fonksiyonun ikinci türevini kullanabiliriz.

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$  eğrisini inceleyelim.

Öğrenciler appleti kullanabilir ve  $T$  noktasını hareket ettirebilir. Teğetin eğriye göre konumunu gözlemleyelim. Ne sonuç çıkarılabilir?



Fonksiyonun birinci ve ikinci türevleri  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$  ve  $f''(x) = 6x - 12$ 'dir. İkinci türevi 0'a eşitlersek,  $f''(x) = 0$ ;  $6x - 12 = 0$  denklemini elde ederiz. Denklemin çözümü  $x = 2$ 'dir.

Tanım kümesinden ikinci türevin durağan noktasını çıkarıyoruz ve iki aralığa bölüyoruz  $(-\infty, 2)$  ve  $(2, +\infty)$ .

Eğer  $(-\infty, 2)$  aralığından  $x_1 < x_2$  olacak şekilde iki değer alırsak, birinci türevin değeri  $f'(x_1) > f'(x_2)$  olur, yani birinci türevin değeri azalır ve bu nedenle  $f''(x) < 0$  olur. Aynı şekilde, bu aralıktaki fonksiyonun teğetine bakarsak, fonksiyonun grafiği tüm aralıkta teğetin altında yer alır.

Diğer yandan,  $x \in (-\infty, 2)$  için ikinci türevin değeri  $f''(x) < 0$ 'dır.

$y = f(x)$  fonksiyonunun  $(-\infty, 2)$  aralığında konveks (dışbükey) olduğu sonucu elde edilir.

Benzer şekilde,  $x_1 < x_2$  olacak şekilde  $(2, +\infty)$  aralığından iki değer alırsak, birinci türevin değeri  $f'(x_1) < f'(x_2)$  olur, yani birinci türevin değeri artar ve bu nedenle  $f''(x) > 0$  olur. Aynı şekilde, bu aralıktaki fonksiyonun teğetine bakarsak, fonksiyonun grafiği tüm aralıkta teğetin üzerinde yer alır.

Diğer yandan,  $x \in (2, +\infty)$  için ikinci türevin değeri  $f''(x) > 0$ 'dır.

$y = f(x)$  fonksiyonunun  $(2, +\infty)$  aralığında konkav (içbükey) olduğu sonucu çıkar.

İkinci türevin 0'a eşit olduğu ve sol ve sağ aralıklarda ikinci türevin işaretinin farklı olduğu noktaya ne denir?

**Tanım.** Eğriliğini dışbükeyden içbükeye veya tersine değiştiren eğrinin aralığını bölen eğri noktalarına eğrinin **dönüm noktası** denir.

**Dönüm noktasını** ve dışbükeylik ve içbükeylik aralıklarını belirleme **kuralı**.

- 1)  $f''(x)$  hesaplanarak ve  $f''(x) = 0$  denklemi çözülerek olası dönüm noktaları olan  $(x_i, f(x_i))$  noktaları belirlenir,  $i = 1, 2, 3, \dots$  için.
- 2)  $f''(x) = 0$  denkleminin bulunan kökleri (çözümleri) büyüklük sırasına göre sıralanır ve denklemin bulunan kökleri arasındaki her aralıkta  $f''(x)$ 'in işareti belirlenir. Şunlar geçerlidir:
  - $f''(x) < 0$  aralığında fonksiyon dışbükeydir (konveks),
  - $f''(x) > 0$  aralığında fonksiyon içbükeydir (konkavdır),
  - Eğer  $f''(x)$  bulunan köklerden birinden geçerken işaret değiştirirse, o zaman o değer dönüm noktasının apsisidir.

**Örnek 1.**  $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 4x - 5$  fonksiyonunun konvekslik ve konkavlık aralıklarını ve dönüm noktalarını bulunuz.

**Çözüm:** Fonksiyonun birinci ve ikinci türevleri  $f'(x) = -6x^2 + 18x - 4$  ve  $f''(x) = -12x + 18$ 'dir.

$f''(x) = 0$  denklemi, yani  $-12x + 18 = 0$ ,  $x = \frac{3}{2}$  çözümüne sahiptir ve ikinci türev her reel sayı için tanımlıdır.



Bu nedenle, reel sayı kümesi iki aralığa ayrılır  $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$  ve  $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ .

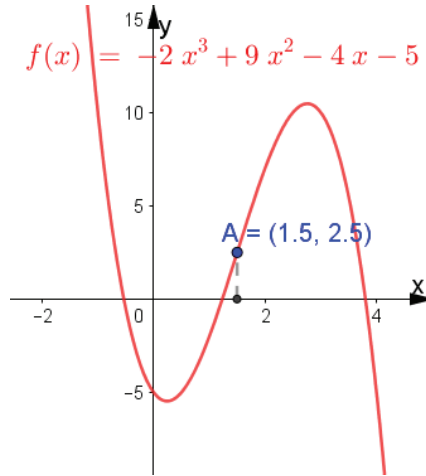
$x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$  için ikinci türevin değeri  $f''(x) > 0$ 'dır.  $y = f(x)$  fonksiyonunun  $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$  aralığında konkav (içbükey) olduğu sonucu elde edilir.

$x \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$  için ikinci türevin değeri  $f''(x) < 0$ 'dır. Fonksiyonun  $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$  aralığında konveks (dışbükey) olduğu sonucu elde edilir.

$x = \frac{3}{2}$  apsisli noktanın solunda ve sağında farklı işaret olduğu için,  $A\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$  noktası verilen fonksiyonun dönüm noktasıdır.

$x = \frac{3}{2}$  için,  $f\left(\frac{3}{2}\right) = -2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 + 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{3}{2} - 5 = \frac{5}{2}$  elde ederiz, yani  $A\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$  noktası fonksiyonun dönüm noktasıdır.

Fonksiyon çizimde grafiksel olarak gösterilmiştir.



#### Alıştırma Problemleri:

1.  $f(x) = x^2(1-x)$  fonksiyonunun konvekslik ve konkavlık aralıklarını ve dönüm noktalarını bulunuz.
2.  $f(x) = x - 2 - \frac{6}{x-1}$  fonksiyonunun konvekslik ve konkavlık aralıklarını ve dönüm noktalarını bulunuz.
3.  $y = x^3 + ax^2 + 1$  eğrisinin  $P(1, y)$  dönüm noktasına sahip olması için  $a$  parametresini belirtiniz.
4.  $y = \frac{x+1}{x^2+1}$  fonksiyonunun aynı doğru üzerinde bulunan üç dönüm noktasına sahip olduğunu kanıtlayınız.

## FONKSİYONUN DEĞİŞİMİNİN İNCELENMESİ VE GRAFİĞİNİN ÇİZİMİ

Şimdiye kadar, verilen bir fonksiyonun birinci ve ikinci türevlerinin yardımıyla monotonluk, ekstremum değer, eğrilik ve dönüm noktaları gibi bazı özelliklerinin nasıl incelendiğini gördük. Bir fonksiyonun asimptotları ve sürekliliği, fonksiyonun limit değeri ile incelenir. Bir fonksiyonun çiftlik, teklik, periyodiklik, koordinat eksenleriyle kesişimleri gibi diğer özelliklerinin incelenmesiyle, fonksiyonun grafiğini çizebilmemiz için yeterli nokta elde edilir.

$f(x)$  fonksiyonunun grafiğini çizmek için şunları belirtmemiz gerekir:

- 1) Fonksiyonun tanım kümesini;
- 2) Fonksiyonun çiftliği, tekliği, periyodikliği;
- 3) Fonksiyon grafiğinin koordinat eksenleriyle kesişim noktalarını (sıfırları ve y eksenine kesişimi);
- 4) Fonksiyonun asimptotlarını;
- 5) Fonksiyonun ekstremum değerleri, değişimi ve monotonluk aralıklarını;
- 6) Dönüm noktalarını ve eğrilik aralıklarını;
- 7) Fonksiyonun grafiğinin çizimi.

Elde edilen verilere dayanarak, fonksiyonun grafiği çizilir. Analitik inceleme ile elde edilen tüm verilerin kademeli olarak koordinat sistemine girilmesi, değişimin gözlemlenmesi ve fonksiyonun grafiğinin çizilmesi önerilir.

**Örnek 1.**  $y = x^3 - 3x + 2$  fonksiyonunun değişimini inceleyiniz ve grafiğini çizin.

**Çözüm:** Fonksiyonun değişimini verilen sıraya göre inceliyoruz.

- 1) Fonksiyon polinom olduğu için, fonksiyonun tanım kümesi reel sayılar kümesidir, yani  $D_f = \mathbb{R}$ .

- 2) Çift ve tek olma durumu. Tanım kümesi simetrik bir kümedir. Bu nedenle,

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) + 2 = -x^3 + 3x + 2 = -(x^3 - 3x - 2) \text{ elde edilir.}$$

Fonksiyonun ne çift ne de tek olduğu sonucuna varırız.

Fonksiyon periyodik değildir. Periyodiklik en sık trigonometrik fonksiyonlarda görülür, bu nedenle her problemde incelemeyeceğiz.

3. Fonksiyon grafiğinin koordinat eksenleriyle kesişim noktaları. Fonksiyonun sıfırları.

Fonksiyonu sıfıra eşitliyoruz, yani  $x^3 - 3x + 2 = 0$ . Deneyerek  $x = 1$ 'in  $1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$  denkleminin kökü olduğunu belirleyebiliriz.  $x = 1$  bu denklemin kökü olduğu için,

Diğer kökleri belirlemek için polinomu  $x-1$  ile böleceğiz ve bir derece daha düşük bir bölüm polinomu ve 0 kalanı elde edeceğiz, yani:

$$(x^3 - 3x + 2) : (x - 1) = x^2 + x - 2$$

$$\begin{array}{r} -x^3 + x^2 \\ \hline x^2 - 3x + 2 \\ -x^2 + x \\ \hline -2x + 2 \\ +2x - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$x^2 + x - 2 = 0$  denkleminde diğer sıfırları da buluyoruz. İkinci dereceden denklemi

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 2}}{2} \text{ formülüne göre çözerek } x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1 \text{ ve } x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2 \text{ ederiz.}$$

$x = 1$  iki katlı köktür, yani fonksiyon  $x$  -eksenine teğettir ve  $A(1, 0)$  noktasıdır.

$x = -2$  tek köktür, yani fonksiyon  $B(-2, 0)$  noktasından geçer.

$y$ - eksenile kesişim noktası.

Fonksiyonda  $x = 0$  yerine koyarsak  $y = f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$  elde ederiz. Fonksiyonun  $y$ - ek- senile kesişim noktası  $C(0, 2)$  noktasıdır.

#### 4) Fonksiyonun asimptotları

Yatay asimptotu yoktur, çünkü

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (x^3 - 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x^3 \left( \frac{x^3}{x^3} - \frac{3x}{x^3} + \frac{2}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x^3 \left( 1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) = \pm \infty$$

Dikey asimptotu yoktur, çünkü tanım kümesi  $D_f = \mathbb{R}$ 'dir ve kritik bir değeri yoktur.

Eğik asimptotu yoktur, çünkü

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^3 \left( \frac{x^3}{x^3} - \frac{3x}{x^3} + \frac{2}{x^3} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2 \left( 1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right)}{1} = +\infty$$

**Not:** Polinom fonksiyonunun asimptotu yoktur.

#### 5) Ekstreum değerler, çeşiti ve monotonluk aralıkları.

Fonksiyonun türevi  $y' = f'(x) = 3x^2 - 3$  ise, 0'a eşitlersek,  $3x^2 - 3 = 0$  denklemini, yani  $x^2 = 1$ 'i elde ederiz. Denklemin çözümleri  $x_1 = 1$  ve  $x_2 = -1$ 'dir.

$x_1 = 1$  ise,  $y(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = -2 + 2 = 0$  olur. Dolayısıyla  $E_1(1, 0)$  elde ederiz.

$x_2 = -1$  ise,  $y(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4$  olur. Dolayısıyla  $E_2(-1, 4)$  elde ederiz.

$E_1(1, 0)$  ve  $E_2(-1, 4)$  noktaları fonksiyonun olası ekstremum noktalarıdır.

Fonksiyonun birinci türevinin işaretini,  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 1)$  ve  $(1, +\infty)$  aralıklarından rastgele bir değer in işaretini hesaplayarak monotonluk aralıklarını ve ekstremum noktalarını belirtebiliriz.

| $x$                | $-\infty$        | $-1$             | $1$             | $+\infty$ |
|--------------------|------------------|------------------|-----------------|-----------|
| aralık             | $(-\infty, -1)$  | $(-1, 1)$        | $(1, +\infty)$  |           |
| $f'(x) = 3x^2 - 3$ | $f'(-2) = 9 > 0$ | $f'(0) = -3 < 0$ | $f'(2) = 9 > 0$ |           |
| monotonluğu        | $\nearrow$       | $\searrow$       | $\nearrow$      |           |
| $f(x)$ 'in değeri  |                  | 4                | 0               |           |
| noktalar           |                  | $E_2$            | $E_1$           |           |

$E_1(1, 0) \equiv A$  noktasında fonksiyonun minimumu,  $E_2(-1, 4)$  noktasında fonksiyonun maksimumu olduğu sonucuna varırız.

Monotonluk aralıkları şunlardır:

$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  aralığında  $f(x)$  monoton artandır,

$x \in (-1, 1)$  aralığında  $f(x)$  monoton azalandır.

6) Dönüm noktaları ve eğrilik aralıkları.

$y = x^3 - 3x + 2$  fonksiyonu için birinci türev  $y' = 3x^2 - 3$  ve ikinci türev  $y'' = 6x$ 'tir.

Eğrilik aralıklarını belirlemek için ikinci türevi 0'a eşitliyoruz,  $y'' = 0$ , o halde  $6x = 0$  denklemini elde ederiz, oradan da  $x = 0$  elde edilir.

$x = 0$  ise,  $y(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$  olur. Dolayısıyla  $P(0, 2)$  elde ederiz.

$P(0, 2)$  noktası fonksiyonun olası dönüm noktasıdır.

Eğrilik aralıklarını,  $(-\infty, 0)$  ve  $(0, +\infty)$  aralıklarından rastgele bir değer in işaretini hesaplayarak fonksiyonun ikinci türevinin işaretini hesaplayarak belirleyebiliriz.

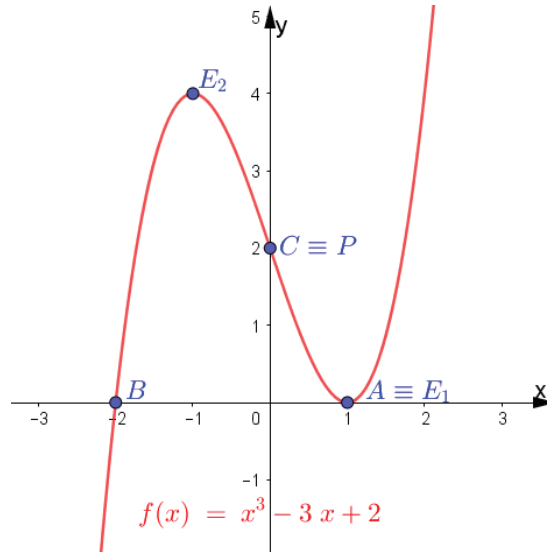
| $x$               | $-\infty$          | $0$ | $+\infty$        |
|-------------------|--------------------|-----|------------------|
| aralık            | $(-\infty, 0)$     |     | $(0, +\infty)$   |
| $f''(x) = 6x$     | $f''(-1) = -6 < 0$ |     | $f''(1) = 6 > 0$ |
| eğriliği          | $\cap$             |     | $\cup$           |
| $f(x)$ 'in değeri | 2                  |     |                  |
| noktalar          | $P$                |     |                  |

$x \in (-\infty, 0)$  için,  $f(x)$  konvekstir (dışbükeydir),

$x \in (0, +\infty)$  için,  $f(x)$  konkavdır (içbükeydir).

$P(0, 2) \equiv C$  noktasında, ikinci türevin işareti değiştiği için fonksiyonun dönüm noktası vardır.

7.  $y = x^3 - 3x + 2$  fonksiyonunun grafiği şöyledir:



**Not:** Fonksiyonları daha kolay çizmek için, inceleme tamamlandıktan sonra grafiği GeoGebra'da çizmek önerilir. Bu şekilde öğrenciler elde edilen çözümü bağımsız olarak kontrol edebilirler.

**Örnek 2.**  $f(x) = 3x^5 - 6x^3$  fonksiyonunun değişimini inceleyelim ve grafiğini çizelim.

**Çözüm:**

Fonksiyonun grafiğini GeoGebra'da fonksiyonu girerek çiziyoruz; fonksiyonu giriş

alanında yazıp, aşağıdaki komutlarla fonksiyonun ilgili değerlerini belirliyoruz:

Fonksiyonun ekstremumu için komut: Ekstrem (f)

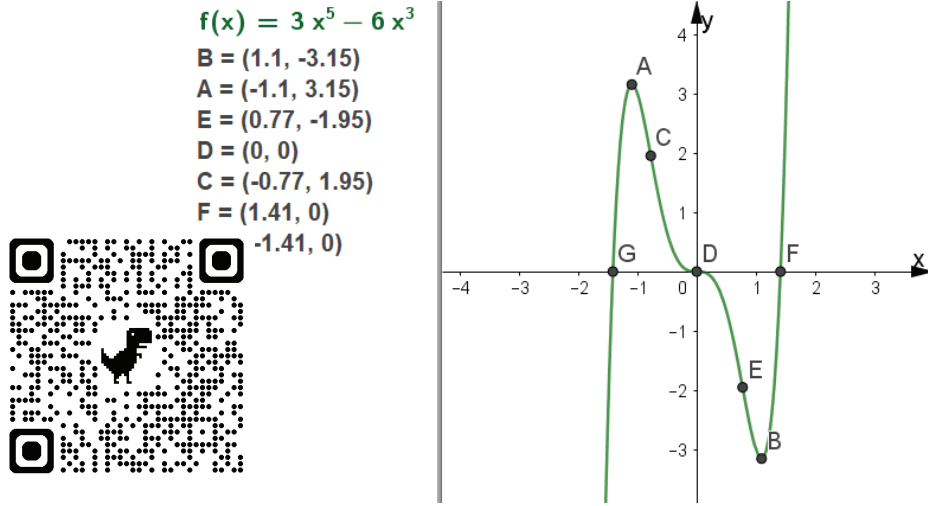
Fonksiyonun dönüm noktası için komut: DönümNoktası (f)

Fonksiyonun y eksenini ile kesişim noktası için komut: Kesişim (f,x=0)

Fonksiyonun x eksenini ile kesişim noktası için komut: Kesişim (f,y=0)

Fonksiyonun asimptotları için komut: Asimptot (f).

GeoGebra'daki "Cebirsel Pencere"de elde edilen tüm noktaların koordinatları yazılıdır.



<https://www.geogebra.org/m/d6p3weqy>

**Örnek 3.**  $y = \frac{x^2}{x-1}$  fonksiyonunun akışını inceleyiniz ve grafiğini çiziniz.

**Çözüm:** Fonksiyonun değişimini verilen şemaya göre inceliyoruz.

1) Tanım kümesi.

Fonksiyon rasyonel bir kesir olduğu için, tanım kümesini belirlemek için  $x-1=0$  denklemini, yani  $x=1$ 'i çözmemiz ve çözümü reel sayılar kümesinden çıkarmamız gerekir. Dolayısıyla  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  yani  $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

2) Çift ve tek olma durumu.

Tanım kümesi  $D_f$  simetrik değildir,  $f(-x)$ 'i incelemeye gerek yoktur. Fonksiyonun ne çift ne de tek olduğu sonucuna varırız.

3) Fonksiyon grafiğinin koordinat eksenleriyle kesişim noktaları. x eksenini ile kesişim noktası  $f(x)=0$  ise elde edilir, yani  $\frac{x^2}{x-1}=0$  denklemi çözülür.

Kesir, payda 0'a eşitse 0'a eşit olur, yani  $x^2=0$ . Denklemin çözümü  $x=0$  dır.

Dolayısıyla,  $A(0,0)$  iki kat köktür.

$y$  eksenile kesişim noktası  $x = 0$  için elde edilir.  $f(0) = \frac{0^2}{0-1} = 0$  elde ederiz. Nokta,  $x$  eksenile kesişim noktasıyla çakışır, yani  $A(0,0)$  noktasıdır.

4) Fonksiyonun asimptotları.

a) Fonksiyonun  $x = 1$  için dikey asimptotu olabilir, çünkü tanım kümesi  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  dir, yani kritik değer  $x = 1$ 'dir.

$x = 1$  için sol ve sağ limit değerlerini belirtelim.

$h > 0$  ve  $h \rightarrow 0$  için  $x = 1 - h$  değişimini yaparsak sol limit değerini buluruz, yani

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1-h)^2}{1-h-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-2h+h^2}{-h} = -\infty$$

$h > 0$  ve  $h \rightarrow 0$  için  $x = 1 + h$  değişimini yaparsak sağ limit değerini buluruz, yani

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2}{1+h-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+2h+h^2}{h} = +\infty$$

Dikey asimptotun  $x = 1$  doğrusu olduğunu elde ederiz, burada grafik sağdan asimptotun üst tarafına ve soldan asimptotun alt tarafına yaklaşır.

b) Yatay asimptot.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x \left( \frac{x}{x} - \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1 - \frac{1}{x}} = \pm\infty,$$

Fonksiyonun yatay asimptotu yoktur.

c) Eğik asimptot  $y = kx + n$  doğrusudur.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 \left( 1 - \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x-1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x \left( 1 - \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1$$

Fonksiyonun eğik asimptotu  $y = x + 1$  doğrusudur.

Fonksiyonun grafiğinin eğik asimptota göre nasıl davrandığını belirleyelim. Farkı hesaplıyoruz:

$$f(x) - y = \frac{x^2}{x-1} - (x+1) = \frac{x^2 - (x+1)(x-1)}{x-1} = \frac{x^2 - x^2 + 1}{x-1} = \frac{1}{x-1}$$

Bu farkın,  $x$ 'e göre işaretini belirliyoruz.

$x > 1$  için,  $\frac{1}{x-1} > 0$  olduğundan, eğri  $x > 1$  için asimptotun üzerindedir ve  $x < 1$  için,  $\frac{1}{x-1} < 0$  olduğundan, eğri  $x < 1$  olduğunda asimptotun altındadır.

5) Ekstremum değerler, çeşitli ve monotonluk aralıkları.

$$y' = \left( \frac{x^2}{x-1} \right)' = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \text{ fonksiyonun türevini, } 0 \text{'a eşitlersek, } x^2 - 2x = 0 \text{ denk-$$

lemine, yani  $x(x-2) = 0$ 'ı elde ederiz. Denklemin çözümleri  $x_1 = 0$  ve  $x_2 = 2$ 'dir.

$$x_1 = 0 \text{ ise, } y(0) = \frac{0^2}{0-1} = \frac{0}{-1} = 0 \text{'dır. Dolayısıyla } E_1(0,0) \text{ elde ederiz.}$$

$$x_2 = 2 \text{ ise, } y(2) = \frac{2^2}{2-1} = \frac{4}{1} = 4 \text{'tür. Dolayısıyla } E_2(2,4) \text{ elde ederiz.}$$

$E_1(0,0)$  ve  $E_2(2,4)$  noktaları fonksiyonun olası ekstremum noktalarıdır.

$(-\infty, 0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,2)$  ve  $(2, +\infty)$  aralıklarından rastgele bir değer in işaretini yerine koyarak fonksiyonun birinci türevinin işaretini hesaplarız. Birinci türev  $x = 1$  noktasında tanımsız olduğundan, aralıkları bölen nokta olarak 1 noktası da alınır. Tablodan monotonluk aralıklarını ve ekstremum noktaları belirleyebiliriz.

| $x$                                | $-\infty$                  | 0                                     | 1                                     | 2                         | $+\infty$ |
|------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------|-----------|
| aralık                             | $(-\infty, 0)$             | $(0,1)$                               | $(1,2)$                               | $(2, +\infty)$            |           |
| $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$ | $f'(-1) = \frac{3}{4} > 0$ | $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -3 < 0$ | $f'\left(\frac{3}{2}\right) = -3 < 0$ | $f'(3) = \frac{3}{4} > 0$ |           |
| monotonluğu                        | $\nearrow$                 | $\searrow$                            | $\searrow$                            | $\nearrow$                |           |
| $f(x)$ 'in değeri                  |                            | 0                                     | /                                     | 4                         |           |
| noktalar                           |                            | $E_1$                                 | /                                     | $E_2$                     |           |

$E_1(0,0) \equiv A$  noktasında fonksiyonun maksimumu ve  $E_2(2,4)$  noktasında fonksiyonun minimumu olduğu sonucuna varırız.

Monotonluk aralıkları şunlardır:

$x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$  için  $f(x)$  monoton artandır,

$x \in (0,1) \cup (1,2)$  için  $f(x)$  monoton azalandır.

6) Dönüm noktaları ve eğrilik aralıkları.



$y = \frac{x^2}{x-1}$  fonksiyonu için birinci türev  $y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$  ve ikinci türev şudur:

$$y'' = \left( \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2 - 2x) \cdot 2 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(x-1)((2x-2)(x-1) - 2(x^2 - 2x))}{(x-1)^4} = \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - 2x^2 + 4x}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

Eğrilik aralıklarını belirlemek için ikinci türevi 0'a eşitliyoruz,  $y'' = 0$ , yani  $2 = 0$  denklemini elde ederiz, bu denklemin çözümü yoktur.

Fonksiyonun dönüm noktası yoktur.

İkinci türev  $x = 1$  için tanımlı değildir.

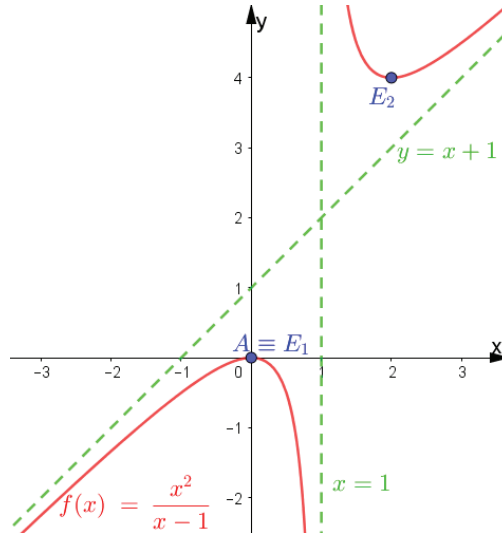
Eğrilik aralıklarını belirlemek için fonksiyonun ikinci türevinin işaretini  $(-\infty, 1)$  ve  $(1, +\infty)$  aralıklarında hesaplıyoruz.

| $x$                          | $-\infty$         | 1 | $+\infty$        |
|------------------------------|-------------------|---|------------------|
| aralık                       | $(-\infty, 1)$    |   | $(1, +\infty)$   |
| $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$ | $f''(0) = -2 < 0$ |   | $f''(2) = 2 > 0$ |
| eğriliği                     | $\cap$            |   | $\cup$           |
| $f(x)$ 'in değeri            |                   | / |                  |
| noktalar                     |                   | / |                  |

$x \in (-\infty, 1)$  için  $f(x)$  konvekstir (dışbükeydir),

$x \in (1, +\infty)$  için  $f(x)$  konkavdır (içbükeydir).

7)  $y = \frac{x^2}{x-1}$  fonksiyonunun grafiği şöyledir:



**Örnek 4.**  $y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$  fonksiyonunun değişimini inceleyiniz ve grafiğini çizin.

**Çözüm:** Fonksiyonun değişimini verilen şemaya göre inceliyoruz.

1) Tanım kümesi  $D_f = \mathbb{R}$ .

2) Fonksiyonun çift veya tek olma durumu:

$D_f$  simetrik bir kümedir.

$f(-x) = -x \cdot e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = -f(x)$ , dolayısıyla fonksiyon tektir. Fonksiyonun grafiği koordinat başlangıcına göre simetriktir.

3) Fonksiyon grafiğinin koordinat eksenleriyle kesişim noktaları.

$x$ - eksenile kesişim noktası  $f(x) = 0$  ise elde edilir, yani  $x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$  denklemi çözülür.

Denklem ancak  $x = 0$  olduğu durumda 0' ır.

Yani,  $A(0,0)$  fonksiyonun sıfırıdır.

$y$ - eksenile kesişim noktası  $x = 0$  için elde edilir.  $f(0) = -0 \cdot e^{-\frac{0^2}{2}} = -0 \cdot e^0 = 0$  elde ederiz. Nokta,  $x$ - eksenile kesişim noktasıyla çakışır, yani  $A(0,0)$  noktasıdır.

4) Fonksiyonun asimptotları.

a) Dikey asimptot. Fonksiyonun tanım kümesi tüm reel sayılar kümesi olduğundan, fonksiyonun dikey asimptotu yoktur.

b) Yatay asimptot.

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}} = 0$$

$y = 0$  doğrusu fonksiyonun yatay asimptotudur.

Fonksiyon grafiğinin yatay asimptota göre nasıl davrandığını belirleyelim. Şu farkı hesaplıyoruz:

$$f(x) - y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} - 1$$

Bu farkın  $x$  değişkenine göre işaretini belirliyoruz.

$x > 0$  için,  $x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} - 1 > 0$  olduğundan, eğri  $x > 0$  için asimptotun üzerindedir ve  $x < 0$  için,  $x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} - 1 < 0$  olduğundan, eğri  $x < 0$  olduğunda asimptotun altındadır.

c) Eğik asimptot.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0, \text{ fonksiyonun eğik asimptotu yoktur.}$$

5) Ekstremum değerler, türü ve monotonluk aralıkları.

Fonksiyonun türevini hesaplıyoruz:

$$y' = \left( x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \right)' = e^{-\frac{x^2}{2}} + x \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot 2x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - x^2).$$

Sıfıra eşitlersek  $e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - x^2) = 0$  denklemini, yani  $1 - x^2 = 0$ 'ı elde ederiz. Denklemin çözümleri  $x_1 = 1$  ve  $x_2 = -1$ 'dir.

$$x_1 = 1 \text{ ise, } y = f(1) = 1 \cdot e^{-\frac{1^2}{2}} = 1 \cdot \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \text{ olur. Dolayısıyla } E_1 \left( 1, \frac{1}{\sqrt{e}} \right) \text{ elde ederiz veya yaklaşık}$$

olarak hesaplırsak  $E_1(1, 0.61)$  elde ederiz.

$$x_2 = -1 \text{ ise, } y = f(-1) = (-1) \cdot e^{-\frac{(-1)^2}{2}} = (-1) \cdot e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{e}} \text{ olur. Dolayısıyla } E_2 \left( -1, -\frac{1}{\sqrt{e}} \right)$$

elde ederiz veya yaklaşık olarak hesaplırsak  $E_2(-1, -0.61)$  elde ederiz.

$E_1(1, 0.61)$  ve  $E_2(-1, -0.61)$  noktaları fonksiyonun olası ekstremum noktalarıdır.

$(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 1)$  ve  $(1, +\infty)$  aralıklarından rastgele bir değerin işaretini yerine koyarak fonksiyonun birinci türevinin işaretini hesaplarız. Tablodan monotonluk aralıklarını ve ekstremum noktalarını belirleyebiliriz.

| x                                      | $-\infty$                     | -1              | 1                            | $+\infty$ |
|----------------------------------------|-------------------------------|-----------------|------------------------------|-----------|
| aralık                                 | $(-\infty, -1)$               | $(-1, 1)$       | $(1, +\infty)$               |           |
| $f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - x^2)$ | $f'(-2) = -\frac{3}{e^2} < 0$ | $f'(0) = 1 > 0$ | $f'(2) = -\frac{3}{e^2} < 0$ |           |
| monotonluğu                            | $\searrow$                    | $\nearrow$      | $\searrow$                   |           |
| $f(x)$ 'in değeri                      |                               | -0.61           | 0.61                         |           |
| noktalar                               |                               | $E_2$           | $E_1$                        |           |

$E_1(1, 0.61)$  noktasında fonksiyonun maksimumu ve  $E_2(-1, -0.61)$  noktasında fonksiyonun minimumu olduğu sonucuna varırız.

Monotonluk aralıkları şunlardır:

$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  aralıklarında,  $f(x)$  monoton olarak azalır,

$x \in (-1, 1)$  aralığında,  $f(x)$  monoton olarak artar.

6) Dönüm noktaları ve eğrilik aralıkları.

$y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$  fonksiyonu için, birinci türev  $y' = e^{-\frac{x^2}{2}}(1 - x^2)$  ve ikinci türev şudur:

$$y'' = \left( e^{-\frac{x^2}{2}}(1 - x^2) \right)' = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (1 - x^2) + e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-2x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x + x^3 - 2x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(x^3 - 3x)$$

Eğrilik aralıklarını belirlemek için ikinci türevi  $y'' = 0$ 'a eşitliyoruz;  $e^{-\frac{x^2}{2}}(x^3 - 3x) = 0$  denklemini elde ederiz. Denklem,  $x^3 - 3x = 0$ , yani  $x(x^2 - 3) = 0$  ise,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \sqrt{3}$  ve  $x_3 = -\sqrt{3}$  çözümleri elde edilir.

$x_1 = 0$  ise,  $f'(0) = 0 \cdot e^{-\frac{0^2}{2}} = 0 \cdot 1 = 0$  olur. Dolayısıyla  $P_1(0, 0)$  elde ederiz.

$x_2 = \sqrt{3}$  ise,  $f'(\sqrt{3}) = \sqrt{3} \cdot e^{-\frac{\sqrt{3}^2}{2}} = \sqrt{3} \cdot e^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{e^3}} = \frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{e}}$  olur. Dolayısıyla  $P_2\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{e}}\right)$  elde ederiz veya yaklaşık değerler hesaplırsak  $P_3(-1.73, -0.39)$  elde ederiz.

$x_3 = -\sqrt{3}$  ise,  $f'(\sqrt{3}) = \sqrt{3} \cdot e^{-\frac{\sqrt{3}^2}{2}} = \sqrt{3} \cdot e^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{e^3}} = \frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{e}}$  olur. Dolayısıyla  $P_3\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{e}}\right)$  elde ederiz veya yaklaşık değerler hesaplırsak  $P_3(-1.73, -0.39)$  elde ederiz.

$P_1(0, 0)$ ,  $P_2(1.73, 0.39)$  ve  $P_3(-1.73, -0.39)$  noktaları fonksiyonun olası dönüm noktalarıdır.

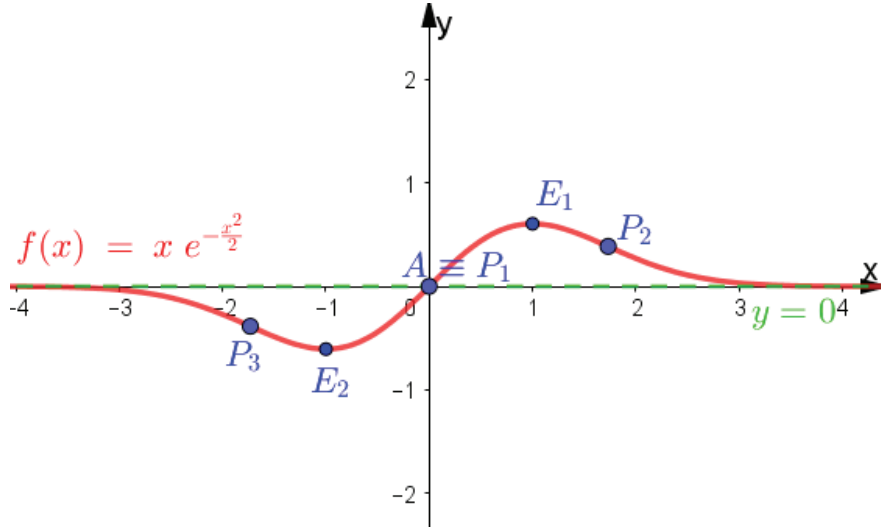
$(-\infty, -\sqrt{3})$ ,  $(-\sqrt{3}, 0)$ ,  $(0, \sqrt{3})$  ve  $(\sqrt{3}, +\infty)$  aralıklarından rastgele bir değerin işaretini yerine koyarak fonksiyonun ikinci türevinin işaretini hesaplayarak fonksiyonun eğriliğini belirleyebiliriz.

| $x$                                     | $-\infty$              | $-\sqrt{3}$      | $0$             | $\sqrt{3}$            | $+\infty$ |
|-----------------------------------------|------------------------|------------------|-----------------|-----------------------|-----------|
| aralık                                  | $(-\infty, -\sqrt{3})$ | $(-\sqrt{3}, 0)$ | $(0, \sqrt{3})$ | $(\sqrt{3}, +\infty)$ |           |
| $f''(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(x^3 - 3x)$ | $f''(-2) < 0$          | $f''(-1) > 0$    | $f''(1) < 0$    | $f''(2) > 0$          |           |
| eğriliği                                | $\cap$                 | $\cup$           | $\cap$          | $\cup$                |           |
| $f(x)$ 'in değeri                       |                        | -0.39            | 0               | 0.39                  |           |
| noktalar                                |                        | $P_3$            | $P_1$           | $P_2$                 |           |

$x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$  için,  $f(x)$  konvektir (dışbükeydir),

$x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$  için,  $f(x)$  konkavdır (içbükeydir).

7)  $y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$  fonksiyonunun grafiğini çizelim:



### Alıştırma Soruları:

1. Aşağıdaki fonksiyonun değişimini inceleyiniz ve grafiğini çiziniz:

a)  $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

b)  $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

c)  $y = \frac{x - 1}{x^2 - 4}$

2. Aşağıdaki fonksiyonun değişimini inceleyiniz ve grafiğini çiziniz:

a)  $y = \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 2x}$

b)  $y = -x^3 + 3x - 2$

c)  $y = x^4 - 4x^3 + 3x^2$

3. Aşağıdaki fonksiyonun değişimini inceleyiniz ve grafiğini çiziniz:

a)  $f(x) = \frac{x}{x - 2}$

b)  $f(x) = \frac{1 - x^2}{x^2 + 1}$

c)  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x}$

4. Aşağıdaki fonksiyonun grafiğini çiziniz:

a)  $f(x) = \frac{x - 1}{x - 2}$

b)  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - 4x}$

c)  $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 2}$

5. Aşağıdaki fonksiyonun akışını inceleyiniz ve grafiğini çiziniz:

a)  $f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$

b)  $f(x) = x \cdot e^{-x}$

c)  $f(x) = x^2 \cdot e^x$

Problemleri GeoGebra'da da gösterebilir ve elde ettiğiniz çözümü kontrol edebilirsiniz.

6.  $f(x) = \frac{3-4x}{x^2-4x+3}$  fonksiyonunun grafiğinden aşağıdaki soruları cevaplayınız:

- Fonksiyonun tanım kümesi nedir?
- Varsa  $x$  eksenine kesişim noktasını,
- Varsa  $y$  eksenine kesişim noktasını,
- Artan ve azalan aralıklarını,
- Konvekslik ve konkavlık aralıklarını,
- Varsa fonksiyonun maksimum ve minimumlarını,
- Varsa dönüm noktalarını,
- $x = 4$  için fonksiyonun yaklaşık değeri nedir?
- Hangi  $x$  değeri için fonksiyonun değeri  $y = 4$ 'tür?
- Fonksiyon çift midir, yoksa tek midir?
- Fonksiyonun asimptotları nelerdir?

$$f(x) = \frac{3-4x}{x^2-4x+3}$$

$$I = \{y = 0, x = 1, x = 3\}$$

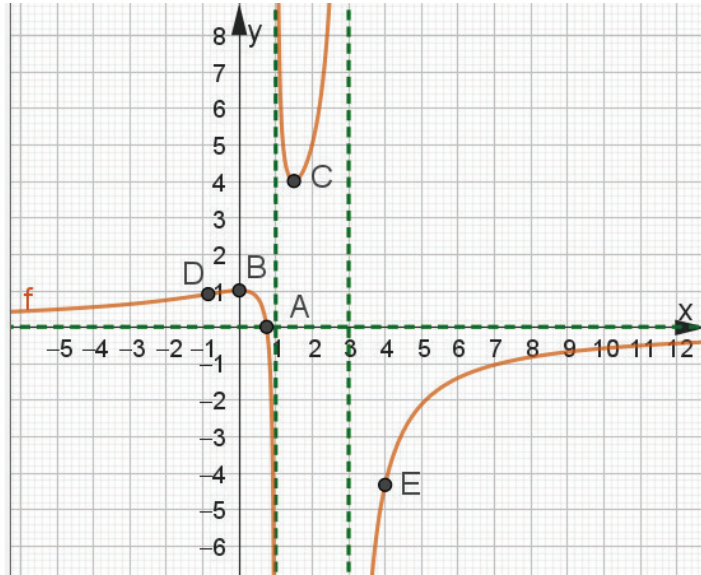
$$A = (0.75, 0)$$

$$B = (0, 1)$$

$$C = (1.5, 4)$$

$$D = (-0.85, 0.9)$$

$$E = (4, -4.33)$$



7.  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$  fonksiyonunun grafiğinden aşağıdaki soruları cevaplayınız:

- Fonksiyonun tanım kümesi nedir?
- Varsa x- eksenile kesişim noktasını,
- Varsa y- eksenile kesişim noktasını,
- Artan ve azalan aralıklarını,
- Konvekslik ve konkavlık aralıklarını,
- Varsa fonksiyonun ekstremlerini,
- Varsa dönüm noktalarını,
- $x = 4$  için fonksiyonun yaklaşık değeri nedir?
- Fonksiyon çift midir, yoksa tek midir?
- Fonksiyonun asimptotları nelerdir?

Not:  $\sqrt{3} \approx 1.73$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$$

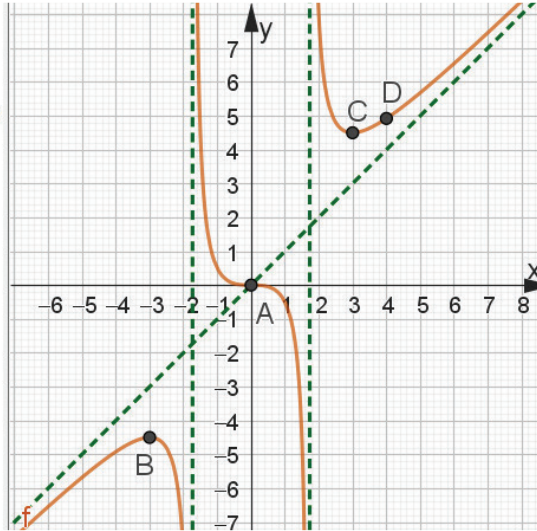
$$I_1 = \{y = x, x = -1.73, x = 1.73\}$$

$$A = (0, 0)$$

$$C = (3, 4.5)$$

$$D = (4, 4.92)$$

$$B = (-3, -4.5)$$



## 9. EKSTREMUM PROBLEMLERİNİ ÇÖZMEK İÇİN TÜREVİN UYGULANMASI

**Örnek 1.** 90 sayısını öyle iki doğal sayının toplamı biçiminde gösteriniz ki, sayılardan birinin diğerinin karesiyle çarpımı maksimum olsun.

**Çözüm:** Sayılardan biri  $x$  ise, diğeri  $90 - x$ 'tir.

Problem koşuluna göre, sayılardan birinin diğerinin karesiyle çarpımını  $P(x) = (90 - x) \cdot x^2$  olarak yazabiliriz, burada  $0 \leq x \leq 90$ 'dır.

$P(x) = 90x^2 - x^3$  olarak yazabileceğimiz  $x$  değişkenli bir fonksiyon elde ettik.

Birinci türev  $P'(x) = 180x - 3x^2$ 'dir ve 0'a eşitlersek  $180x - 3x^2 = 0$  denklemini elde ederiz.

Dolayısıyla,  $3x(60 - x) = 0$ , yani  $3x = 0$  veya  $60 - x = 0$  gerekir.

Denklemin çözümleri,  $P(x)$  fonksiyonu için ekstremum noktalar olan  $x_1 = 0$  ve  $x_2 = 60$ 'tır.

İkinci türev  $P''(x) = 180 - 6x$ 'tir.

$x_1 = 0$ ,  $P''(0) = 180 - 6 \cdot 0 = 180 > 0$ 'dır. Dolayısıyla çarpım minimumdur.

$x_1 = 60$  için,  $P''(60) = 180 - 6 \cdot 60 = 180 - 360 = -180 < 0$ 'dır. Dolayısıyla çarpım maksimumdur ve  $P(60) = (90 - 60) \cdot 60^2 = 108000$ 'dir.

Aranan sayılar 60 ve 30'dur.

**Örnek 2.** 40 sayısı öyle iki sayıya ayırınız ki, sayıların karelerinin toplamı minimum olsun.

**Çözüm:** Topamlardan biri  $x$  ise, diğeri  $40 - x$ 'tir. Karelerinin toplamı  $S(x) = x^2 + (40 - x)^2$  olacaktır.

Fonksiyonun birinci türevi  $S'(x) = 2x + 2(40 - x)(-1) = 4x - 80$ 'dir ve 0'a eşitleriz.  $4x - 80 = 0$  denklemini elde ederiz. Dolayısıyla  $x = 20$ ,  $S(x)$  fonksiyonu için bir ekstremum noktadır.

İkinci türev  $S''(x) = 4$ 'tür.

$x = 20$  için,  $S''(20) = 4 > 0$ 'dır. Dolayısıyla  $x = 20$  için,  $S(20) = 20^2 + (40 - 20)^2 = 800$  toplamının minimum olduğu sonucuna varırız.

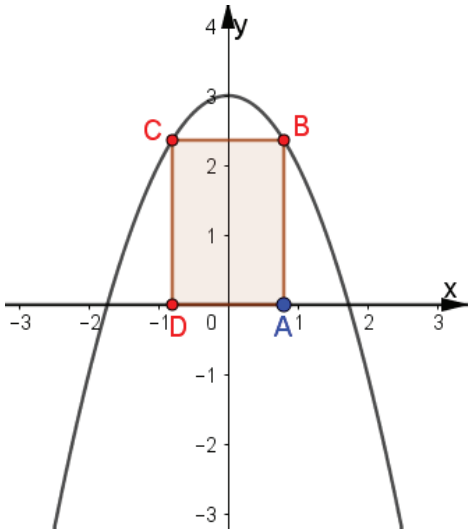
Aranan sayılar 20 ve 20'dir.



**Örnek 3.** Eski bir ev restore edilecek. Resimde görüldüğü gibi kemerli bir tavana sahip duvarlardan birine maksimum boyutta dikdörtgen şeklinde bir kapı açılmalıdır. Tavanın tepe noktasının yüksekliği 3 m ise, kapının boyutlarını belirtiniz. Tavanın şekli  $y = 3 - x^2$  fonksiyonunun grafiğinin bir parçası olduğu belirlenmiştir.



**Çözüm:** GeoGebra'da bir uygulama yapılmıştır. Fonksiyon, odanın tabanı  $x$ - eksenini ve parabolün tepe noktası  $y$ - eksenini üzerinde olacak şekilde bir koordinat sistemine girilmiştir.



$A$  noktasının koordinatları  $(a, 0)$  ve  $B$  noktasının koordinatları  $(a, b)$  olsun.

O halde karşılıklı olarak  $C(-a, b)$  ve  $D(-a, 0)$ 'dir.

Aranan dikdörtgenin kenar boyutları  $2a$  ve  $b$ 'dir.

Dikdörtgenin alanı  $P = 2a \cdot b$ 'dir.

$B$  noktası  $y = 3 - x^2$  parabolüne ait olmalıdır, bu nedenle  $b = 3 - a^2$  denklemi geçerlidir.

Yerine koyarak alan için bir fonksiyon elde ederiz  $P(a) = 2a \cdot (3 - a^2)$ , yani

$$P(a) = 6a - 2a^3 \text{ elde edilir.}$$

<https://www.geogebra.org/m/uwkhppst>

Fonksiyonun birinci türevi  $P'(a) = 6 - 6a^2$ 'dir.

0'a eşitlersek,  $6 - 6a^2 = 0$  elde ederiz. Çözüm  $a = 1$  ve  $a = -1$ 'dir. Simetrik çözümleri temsil ederler. Bu nedenle, çözümü sadece  $a = 1$  ekstremum noktası için belirleyeceğiz.

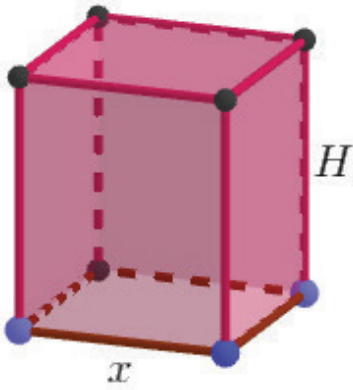
İkinci türev  $P''(a) = -12a'$  dir.

$a = 1$  ekstremum noktası için,  $P''(1) = -12 \cdot 1 = -12 < 0$  elde ederiz, yani fonksiyonun maksimum değeri vardır.

Dolayısıyla,  $a = 1$  için,  $b = 3 - 1^2 = 2$  elde ederiz ve kapının maksimum alanı  $P = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4m^2$  dir. Kapı  $2m$  genişliğinde ve  $2m$  yüksekliğinde olacaktır.

**Örnek 4.** Bir firma üretim süreci için suya ihtiyaç duyar ve bu nedenle bir havuz inşa etmesi gerekir. Tabanı kare şeklinde ve hacmi  $32m^3$  olan havuzun boyutlarını, duvarlarının ve tabanının fayansla kaplanması için en az malzeme harcanacak şekilde belirtiniz.

**Çözüm:** Havuzun kenarı  $x$  ve yüksekliği  $H$  olan kare şeklinde bir tabanı olsun. Kaplanması gereken yüzeylerin alanı  $P = x^2 + 4xH$  dir, burada taban alanı  $x^2$  ve bir yan duvarın alanı  $xH$  dir.



Kare tabanlı havuzun hacmi  $V = x^2H$  dir.

Problem koşulundan  $V = 32m^3$  elde ederiz, dolayısıyla

$$x^2H = 32, \text{ yani } H = \frac{32}{x^2} \text{ dir.}$$

$H$ 'yi alan ifadesine yerine koyarsak

$$P(x) = x^2 + 4x \cdot \frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x} \text{ elde ederiz, bu da ekstre-}$$

mumunu belirlememiz gereken  $x$  değişkenli bir fonksiyondur.

$$\text{Birinci türev } P'(x) = \left( x^2 + \frac{128}{x} \right)' = 2x - \frac{128}{x^2} \text{ dir ve 0'a eşitleriz.}$$

Dolayısıyla,  $2x - \frac{128}{x^2} = 0$ , yani  $2x^3 - 128 = 0$ .  $x^3 = 64$ 'ten  $x = 4$  çözümünü elde ederiz, bu da bir ekstremum noktasıdır.

$$\text{Fonksiyonun ikinci türevi } P''(x) = \left( 2x - \frac{128}{x^2} \right)' = 2 + \frac{256}{x^3}. x = 4 \text{ ü ikinci türeve yerine koyarak}$$

$$P''(4) = 2 + \frac{256}{4^3} = 6 > 0 \text{ elde ederiz. Dolayısıyla } P(x) = x^2 + \frac{128}{x} \text{ fonksiyonu } x = 4 \text{ için minimum}$$

$$\text{değer olan } P(4) = 4^2 + \frac{128}{4} = 48m^2 \text{ değerini alır.}$$

Buna göre, kare tabanlı minimum alana sahip havuzun boyutları için: kenar  $4m$  ve yükseklik

$$H = \frac{32}{x^2} = \frac{32}{4^2} = 2m \text{ elde edilir.}$$

**Örnek 5.** Bir havayolu şirketi yeni havayolu hattının bilet fiyatı için bir kampanya düzenledi. Uçak bileti, uçamda 0 ila 50 yolcu varsa 200 euro'dur. Her ek yolcu için bilet fiyatı 2 euro düşürölür. (Örneğin, hatta 53 yolcu bilet satın aldıysa, her biletin fiyatı 194 euro olur). Maksimum geliri elde etmek için kaç bilet satılmalıdır?

**Çözüm:** 50'den fazla satılan bilet sayısını  $x$  ile gösterelim. O zaman  $50 + x$  bilet satan şirketin kazanacağı tutar  $S = (50 + x)(200 - 2x)$  ile hesaplanır, burada  $200 - 2x$  biletin fiyatıdır.

Denklemleri sadeleştirerek şunu elde ederiz:

$$S(x) = (50 + x)(200 - 2x) = 10000 + 100x - 2x^2$$

Fonksiyonun birinci türevi  $S'(x) = 100 - 4x$ 'tir. Birinci türevi 0'a eşitlersek  $100 - 4x = 0$ , yani  $x = 25$  ekstremum noktasını elde ederiz.

İkinci türev  $S''(x) = -4$ 'tür ve  $x = 25$  için türev  $S''(25) = -4 < 0$ 'dır, bu da fonksiyonun maksimuma sahip olacağı anlamına gelir. Maksimum gelir şu şekilde olacaktır:

$$x = 25 \text{ için, } S(25) = 10000 + 100 \cdot 25 - 2 \cdot 25^2 = 11250 \text{ euro elde ederiz.}$$

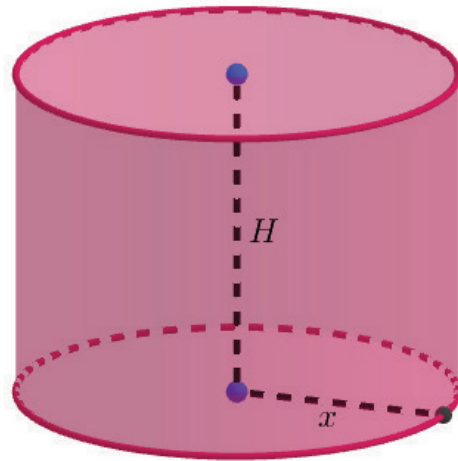
Dolayısıyla, satılan bilet sayısı  $50 + x = 50 + 25 = 75$  olmalıdır ve havayolu şirketi maksimum kazanç elde edecektir.

**Örnek 6.** Dairesel tabanlı silindirik bir kabın  $64 \text{ m}^3$  hacme sahip olması gerekiyor. Kabın üstü açık olacak şekilde kullanılan sac levha (yüzey alanı) miktarının minimum olması için kabın boyutlarını bulunuz.

**Çözüm:** Kabın tabanının yarıçapı  $r$  ve yüksekliği  $H$  olsun. Kullanılan sac levhanın alanı  $P$  ve kabın hacmi  $V$  olsun.

Problem koşuluna göre  $V = 64 \text{ m}^3$  ve silindirin hacim formülü  $V = r^2 \pi H$ 'dir. Yeri-ne değiştirmekle  $x^2 \pi H = 64$  elde ederiz.

Silindirin yüzey alanı formülü  $P = r^2 \pi + 2\pi r H$ 'dir (silindir üstü açık olduğundan sadece bir dairesel tabanın alanı vardır).



$H = \frac{64}{x^2\pi}$  ve yarıçapı  $x$ 'i alan formülünde değiştirmekle şu fonksiyonu elde ederiz:

$$P(x) = x^2\pi + 2\pi x \frac{64}{x^2\pi} = x^2\pi + \frac{128}{x}$$

Fonksiyonun türevi  $P'(x) = 2x\pi - \frac{128}{x^2}$  'dir.

$P'(x) = 0$  denkleminde, yani  $2x\pi - \frac{128}{x^2} = 0$ 'dan,  $x = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$  ekstremum noktasını elde ederiz.

İkinci türev  $P''(x) = 2\pi + \frac{256}{x^3}$  'tür.

$x = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$  için,  $P''\left(\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}\right) = 2\pi + 4\pi = 6\pi > 0$  elde ederiz, yani fonksiyonun minimumu vardır.

Tabanın yarıçapı  $x = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}} \approx 2.73m$  ve yükseklik  $H = \frac{64}{\left(\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2} = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}} \approx 2.73m$ 'dir ve minimum alan  $P = 48\sqrt[3]{\pi} m^2 = 70.3m^2$  elde edilir.

**Örnek 7.** 2400m tel çiti olan bir çiftçi, nehir kenarında bulunan dikdörtgen şeklinde bir tarlayı çitle çevirmek istiyor ve nehir boyunca tel çit kullanmasına gerek yoktur. Çitle çevrili alanın maksimum olması için dikdörtgenin boyutları ne olmalıdır?

**Çözüm:** Tarlanın boyutları  $x$  ve  $y$  olsun. Nehir boyunca tel çit kullanmaya gerek olmadığından, çitin çevresi için problem koşulundan  $2x + y = 2400$ , yani  $y = 2400 - 2x$  elde ederiz.

Tarlanın alanı  $P = xy = x(2400 - 2x)$ 'tir, yani şu formülü elde edilir:

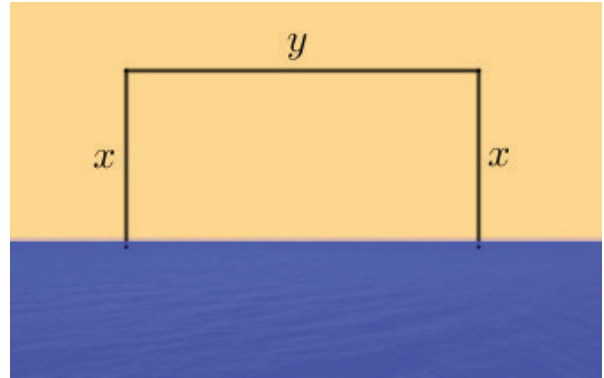
$$P(x) = 2400x - 2x^2.$$

Fonksiyonun birinci türevi  $P'(x) = 2400 - 4x$ 'tir.

Birinci türevi 0'a eşitlersek,  $2400 - 4x = 0$  denklemini elde ederiz ve  $x = 600$  çözümü bir ekstremum noktasıdır.

Fonksiyonun ikinci türevi  $P''(x) = -4$ 'tür ve sabit noktada  $P''(600) = -4 < 0$ 'dır. Dolayısıyla  $x = 600$  için fonksiyonun maksimum değeri vardır.

Çitin kenarları 600 m ve 1200m olmalıdır. Tarlanın maksimum alanı  $720000m^2$ 'dir.

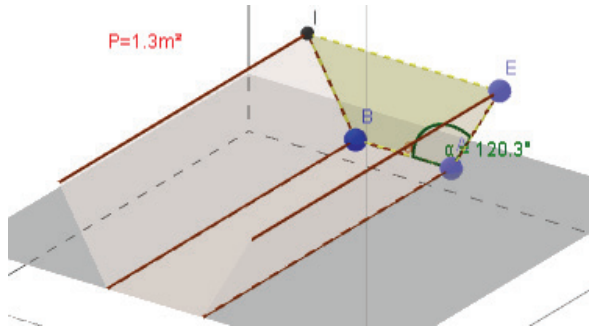


Ekstreum problemlerini çözmek için türev uygulamasının ek pratik örnekleri. Daha fazla araştırma yapmak isteyen öğrenciler için tasarlanmıştır.

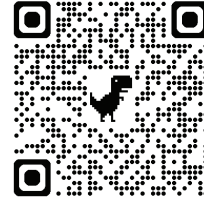
**Örnek 8.** 1 m genişliğinde üç beton blok birbirine bağlanarak açık bir su kanalı yapılmalıdır. Kanalin enine kesiti bir ikizkenar yamuktur. En büyük kesite (en büyük akış kapasitesine) sahip bir kanal oluşturmak için yan bloklar tabana göre hangi açıyla yerleştirilmelidir?

**Çözüm:** Öncelikle biraz araştırma yapalım. İnternette drenaj kanalının resimlerini arayın. Kanal nasıl görünüyor? Şimdiye kadar böyle bir kanal gördünüz mü?

Şimdi kanal oluşturmak için GeoGebra'da bir uygulama kullanabilirsiniz.

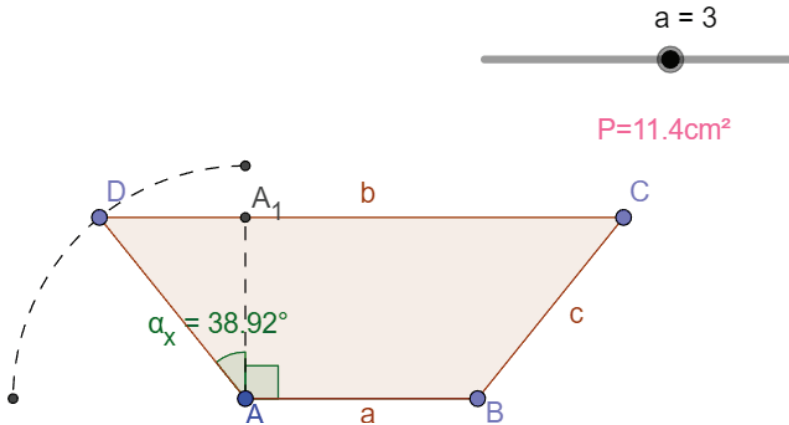


<https://www.geogebra.org/m/k4DNecD7>



E noktasını hareket ettirelim ve kanalın akış kapasitesini gözlemleyelim.

Enine kesit en büyük alana sahipse kanalın en büyük akış kapasitesi olacaktır. Kanalin enine kesiti ikizkenar bir yamuktur. İkizkenar yamuğun alanının maksimum olması için kanalın yan duvarlarının hangi açıyla yerleştirilmesi gerektiğini belirlememiz gerekiyor.



<https://www.geogebra.org/m/ESFG4SFj>



Kanalın enine kesiti için başka bir uygulama kullanacağız. Hareketli  $D$  noktasını hareket ettirerek, maksimum alana sahip olmak için yan duvarların hangi konumda yerleştirilmesi gerektiğini belirleyebiliriz. Yamuğun alanının değiştiğini gözlemliyoruz!

Şimdi enine kesitin bir taslağını çizebiliriz.

Enine kesit, kenarı küçük tabana eşit olan ikizkenar bir yamuktur.

Taban  $a = \overline{AB} = 1m$  ve kenar  $c = \overline{BC} = \overline{AD} = 1m'$  dir.

Diğer tabanı  $b = \overline{CD}$  ve yüksekliği  $h = \overline{AA_1}$  olarak gösterebiliriz.

Yamuğun alanı  $P = \frac{a+b}{2} h$  formülüyle hesaplanır.

Yan duvarın tabanla yaptığı açığı  $x + 90^\circ$  olarak gösterelim, burada  $0^\circ \leq x < 90^\circ$  dir.

$\triangle AA_1D$  Dik üçgeninden  $h'$ 'yi belirleyebiliriz.  $\cos x = \frac{h}{c}$  trigonometrik formülünden

$$h = c \cdot \cos x = 1 \cdot \cos x = \cos x, \text{ yani } h = \cos x$$

Elde edilir. Taban  $b'$ 'yi, yamuğun  $m = \overline{DA_1}$  eşitliği ile belirleyeceğiz.

$$b = a + 2m \text{ ve } \sin x = \frac{m}{c}.$$

Dolayısıyla  $m = c \cdot \sin x = 1 \cdot \sin x = \sin x$ , yani  $b = 1 + 2 \sin x$  gerekir.

Alan formülünde yerine koyarak  $P = \frac{1+1+2 \sin x}{2} \cdot \cos x$  elde ederiz.

$P'$ 'yi  $f(x)$  ile değiştirebiliriz ve  $x$  değişkenli şu fonksiyonu elde ederiz:

$$f(x) = \frac{2(1+\sin x)}{2} \cdot \cos x = (1+\sin x) \cdot \cos x = \cos x + \sin x \cdot \cos x \text{ yani}$$

$$f(x) = \cos x + \sin x \cdot \cos x.$$

Ekstremini belirlemek için, birinci türevi 0'a eşitleyeceğiz ve denklemi çözeceğiz.

$$f'(x) = (\cos x + \sin x \cdot \cos x)' = (\cos x)' + (\sin x)' \cdot \cos x + \sin x \cdot (\cos x)'$$

$$f'(x) = -\sin x + \cos^2 x - \sin^2 x \quad -2 \sin^2 x - \sin x + 1 = 0 \quad /(-1), \text{ t.e}$$

$$f'(x) = 0 \text{ dan, } -\sin x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \text{ denklemini elde ederiz.}$$

Temel trigonometrik özdeşlik  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 'i kullanırsak ve  $\sin x = t$  yerine koyarsak, ikinci dereceden şu denklemi elde ederiz:

$$-\sin x + 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 0$$

$$-2 \sin^2 x - \sin x + 1 = 0 / (-1), \text{ yani } 2t^2 + t - 1 = 0$$

İkinci dereceden denklemin çözümlerini, ikinci dereceden denklem çözme yöntemiyle buluruz:

$$t_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \text{ ve bunlar } t_1 = \frac{1}{2} \text{ ve } t_2 = -1' \text{ dir.}$$

$x$ 'in değerini belirlemek için yer değiştirmeye geri dönersek, şunu elde ederiz:

$$t_1 = \frac{1}{2} \text{ için, } \sin x = \frac{1}{2}, \text{ yani } x = \frac{\pi}{6} = 30^\circ \text{ olur.}$$

$$t_2 = -1 \text{ için, } \sin x = -1, \text{ yani } x = \frac{3\pi}{2} = 270^\circ \text{ olur.}$$

Fonksiyonun ikinci türevini belirleyelim:

$$f''(x) = (-\sin x + \cos^2 x - \sin^2 x)' = -\cos x + 2 \cos x(-\sin x) - 2 \sin x \cos x$$

$$f''(x) = -4 \sin x \cos x - \cos x$$

$$x = \frac{\pi}{6} = 30^\circ \text{ için, } f''(30^\circ) = -4 \sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 30^\circ, \text{ yani}$$

$$f''(30^\circ) = -\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0$$

Dolayısıyla, fonksiyonun  $x = 30^\circ$  için maksimum değeri vardır.

$x = \frac{3\pi}{2} = 270^\circ$  değeri aralığa ait değildir, bu nedenle ikinci türevin değerini hesaplamaya gerek yoktur.

Başlangıç koşullarında yerine koyarsak, şunu elde ederiz:

$$b = 1 + 2 \cdot \sin 30^\circ = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 + 1 = 2 \text{ ve}$$

$$h = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

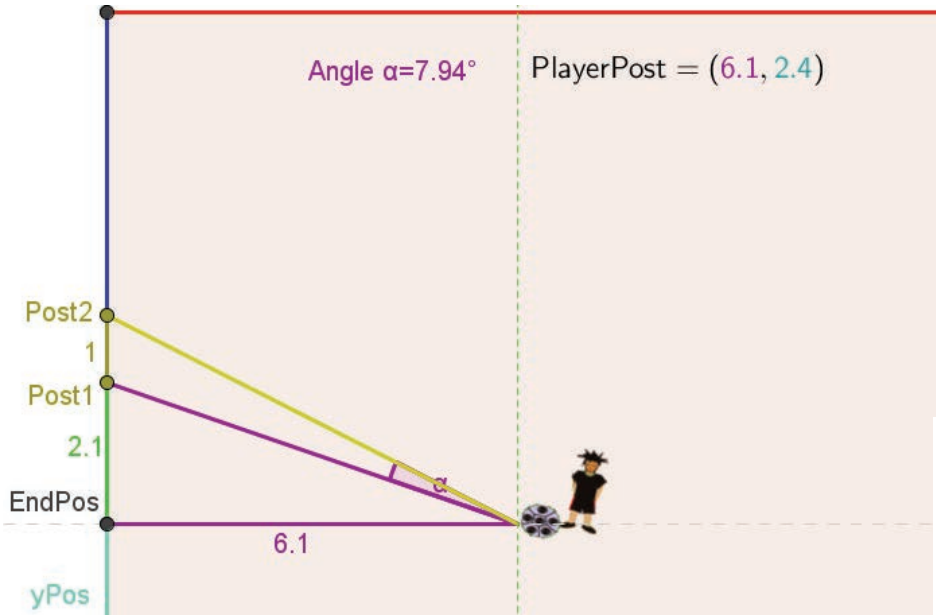
Yamuğun maksimum alanı için şunu elde ederiz:

$$P = \frac{1+2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \text{ yani } P = 1,299 \approx 1,3m^2.$$

**Örnek 9.** Bir futbolcu, taç çizgisine paralel olarak sahada koşuyor. Futbolcu, gol atma açısı maksimum olacak şekilde kaleye şutu nereden çekmelidir?

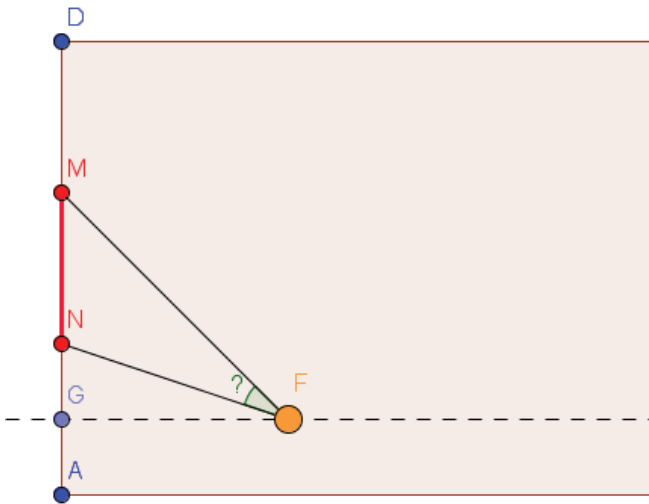
**Not:** Futbolcunun koştuğu paralel çizgi kale çizgisini geçmemelidir. Neden? Bu durumda açı nedir? Futbolcu, açının maksimum olması için şutu nereden çekmelidir?

**Çözüm:** Başlangıçta bir aplet uygulaması kullanabilir ve futbolcunun hareketiyle açının nasıl değiştiğini görebiliriz.



<https://www.geogebra.org/m/M7YfNB8r>

Ödevin Taslağı Çizelim.



Oyun alanı dikdörtgen şeklindedir ve kale noktaları temsil edilebilir.

Açı: İlk direk, futbolcu, ikinci direk.

Açıyı  $\alpha$  ile gösterelim.

Gösterimler:

$\alpha = \angle NFM$

$N$  - ilk direk

$M$  - ikinci direk

$F$  - futbolcu.

Futbolcuyu temsil eden  $F$  noktası hareketlidir.

Futbolcu, taç çizgisinin paralelinde bir doğru boyunca hareket eder.

Futbolcunun hareket ettiği paralel doğru kale çizgisini geçmemelidir.

$\triangle NGF$  ve  $\triangle MGF$  dik üçgenlerini inceleyelim.



İşaretler:  $\overline{MN} = g$  - kalenin genişliği

$\overline{GN} = s$  - futbolcunun hareket ettiği taç çizgisine paralel doğrunun kale çizgisiyle kesişiminden ilk direğe olan mesafe.

$\overline{FG} = b$  - futbolcunun kale çizgisine olan uzaklığı.

$tg(\angle GFN) = \frac{s}{b}$  ve  $tg(\angle GFM) = \frac{g+s}{b}$ , trigonometrik formüllerinden, şunu elde ederiz:

$$\angle GFN = \arctg \frac{s}{b} \text{ ve } \angle GFM = \arctg \frac{g+s}{b}.$$

$\alpha = \angle GFM - \angle GFN$  açısını ifade edersek, şunu elde ederiz:

$$\alpha = \arctg \left( \frac{g+s}{b} \right) - \arctg \left( \frac{s}{b} \right)$$

$b=x$  ve  $\alpha = f(x)$  yerine koyarsak,

$$f(x) = \arctg \left( \frac{g+s}{x} \right) - \arctg \left( \frac{s}{x} \right).$$

Fonksiyonun türevi:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left( \frac{g+s}{x} \right)^2} \cdot \frac{-(g+s)}{x^2} - \frac{1}{1 + \left( \frac{s}{x} \right)^2} \cdot \frac{-s}{x^2} = \frac{-(g+s)}{x^2 + (g+s)^2} + \frac{s}{x^2 + s^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ ise, } \frac{-(g+s)}{x^2 + (g+s)^2} + \frac{s}{x^2 + s^2} = 0 \text{ denklemi elde edilir.}$$

Bunu sadeleştirerek çözmekle

$$x^2 g + s^2 (g+s) = s(g+s)^2$$

$$x^2 g = s(g+s)^2 - s^2(g+s)$$

$$x^2 g = s(g+s)((g+s)-s)$$

$$x^2 g = s(g+s)g$$

$$x^2 = s(g+s) \text{ yani } x = \sqrt{s(g+s)} \text{ ekstremum noktadır.}$$

$$\text{İkinci türev } f''(x) = \frac{2x(g+s)}{(x^2 + (g+s)^2)^2} + \frac{-2sx}{(x^2 + s^2)^2} \text{ 'dir.}$$

$x = \sqrt{s(g+s)}$  için,  $x$  noktasında ikinci türevin değeri:

$$f''(\sqrt{s(g+s)}) = 2\sqrt{s(g+s)} \left( \frac{-g}{s(g+s)(g+2s)^2} \right) < 0$$

dir, çünkü sadece  $-g < 0$  olduğundan, bölüm negatiftir, yani fonksiyonun maksimum değeri vardır.

$x = \sqrt{s(g+s)}$  için maksimum açı değerini elde ederiz:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{g+s}{\sqrt{s(g+s)}}\right) - \arctg\left(\frac{s}{\sqrt{s(g+s)}}\right).$$

Çözüm olarak ne elde ederiz?

$g=3m$  ve  $s=6m$  olan küçük bir futbol sahasının somut değerlerini değiştirirsek, şunu elde ederiz:

$$x = \sqrt{6(3+6)} = \sqrt{6 \cdot 9} \text{ yani } x = 3\sqrt{6} \approx 7,35m \text{ ve}$$

$$f(3\sqrt{6}) = \arctg\left(\frac{9}{3\sqrt{6}}\right) - \arctg\left(\frac{6}{3\sqrt{6}}\right) = 50,77^\circ - 39,23^\circ = 11,54^\circ$$

Futbolcu, kale çizgisinden  $7,35m$  uzakta şut çekmelidir ve maksimum açı  $11,54^\circ$  olmalıdır.

### Alıştırma Problemleri:

- 42 sayısını, çarpımları en büyük olacak şekilde iki parçaya (toplanana) ayırın.
- 27 sayısını, karelerinin toplamı en küçük olacak şekilde iki parçaya (toplanana) ayırınız.
- 18 sayısını, küplerinin toplamı en küçük olacak şekilde iki parçaya (toplanana) ayırınız .
- Çevresi 26 cm olan tüm dikdörtgenlerden, en büyük alana sahip olanı belirtiniz.
- Çevresi 22 cm olan tüm dikdörtgenlerden, en küçük köşegene sahip olanı belirtiniz.
- Dördüncü sınıf öğrencileri, okullarındaki eğitim fuarı için spor sahasına dikdörtgen şeklinde 32 sıra (rahle) yerleştirmelidir. En büyük alana sahip olmak için sıralar nasıl yerleştirilmelidir?

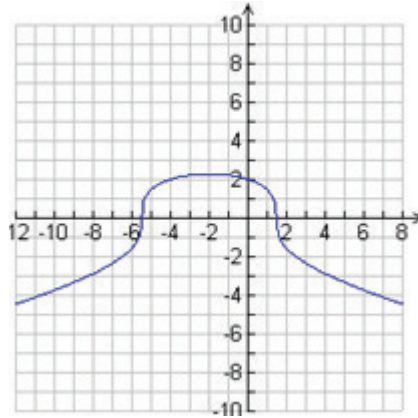
Bir sıra 1.5 m uzunluğunda ise, sıraların yerleştirilmesinden sonra dikdörtgen şeklindeki alanın kenar uzunlukları ne kadar olacaktır?

- Hipotenüsü 10 cm olan tüm dik üçgenlerden, en büyük alana sahip olanı belirtiniz.
- Tabanı 8 cm ve yüksekliği 3 cm olan bir üçgene, bir kenarı üçgenin verilen tabanında olmak üzere, en büyük alana sahip bir dikdörtgen çiziniz.
- Alanı  $54 \text{ cm}^2$  olan bir teneke silindir kutu yapılmalıdır. En büyük hacme sahip olacak şekilde dik dairesel silindir kutunun yarıçapını ve yüksekliğini hesaplayınız.
- Yarıçapı 4 cm ve yüksekliği 6 cm olan bir koni içinde, en büyük hacimli bir silindir yerleştiriniz.
- Yarıçapı 20 cm olan bir kürenin etrafına, dıştan teğet olacak en küçük hacimli bir koni yerleştiriniz (çevreleyiniz).

12. 48 cm ve 30 cm boyutlarında dikdörtgen şeklinde bir kartondan en büyük hacimli bir kutu yapınız. (Kartonun 4 köşesinden birer kare kesilmeli ve karton katlanarak kapaksız bir kutu elde edilmelidir.)
13.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  elipsine birinci dördülde, öyle bir teğet çizilsin ki, koordinat eksenleriyle en küçük alanlı üçgen meydana gelsin.
14.  $y = 4 - x^2$  ve  $y = 0$  ile sınırlanan alana, kenarları koordinat eksenlerine paralel olmak üzere, alanı en büyük olan bir dikdörtgen çiziniz.

## TEKRARLAMA VE PRATİKTE UYGULAMA PROBLEMLERİ:

1.  $f(x) = 4x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$  fonksiyonunun türevini hesaplayınız.
2.  $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$  fonksiyonunun türevini hesaplayınız.
3.  $f(x) = \ln\left(\frac{3x-2}{x+1}\right)$  fonksiyonunun türevini hesaplayınız.
4.  $f(x) = e^{3x} \sin(x^2 + 1)$  fonksiyonunun türevini hesaplayınız.
5.  $y = 4x - x^2$  fonksiyonunun grafiğinin  $x = 2$  noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.
6.  $f(x) = x^3 - 2x + 1$  fonksiyonunun grafiğinin  $x = -1$  noktasındaki normalinin denklemini bulunuz.
7.  $s(t) = t^3 - 2t^2 + 4t$  yol yasasına göre doğrusal hareket eden bir maddi noktanın  $t = 2$  anındaki hızını bulunuz.
8.  $s(t) = 3t^3 + t^2 - 5$  yol kanununa göre doğrusal hareket eden bir maddi noktanın  $t = 1$  anındaki ivmesini bulunuz.
9.  $f(x) = \sqrt[3]{8 - 4x - x^2}$  fonksiyonunun  $x_0 = -4$  apsisli noktadaki teğet ve normalinin denklemlerini yazınız. Elde edilen doğruları aşağıdaki grafikte çiziniz.



10.  $f(x) = \frac{1}{x^3}$  fonksiyonunun monotonluk aralıklarını belirleyiniz.
11.  $f(x) = 2x^3 - 6x^2$  fonksiyonunun yerel ekstremumlarını belirtiniz.

12.  $f(x) = x^3 - 3x^2$  fonksiyonunun konkavlık/konvekslik aralıklarını ve dönüm noktalarını belirtiniz.
13.  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  fonksiyonunun değişimini inceleyiniz ve grafiğini çiziniz.
14.  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$  fonksiyonunun değişimini inceleyiniz ve grafiğini çiziniz.
15. 60 sayısını, çarpımları en büyük olacak şekilde iki parçaya (toplanana) ayırınız.
16. 80 sayısını, karelerinin toplamı en küçük olacak şekilde iki parçaya (toplanana) ayırınız.
17. 100 sayısını, küplerinin toplamı en küçük olacak şekilde iki parçaya (toplanana) ayırınız.
18. Çevresi 44 cm olan tüm dikdörtgenlerden, en büyük alana sahip olanı belirtiniz.
19. Yarıçapı  $r$  ve yüksekliği  $H$  olan bir koniye, en büyük hacimli içten teğet bir silindir yerleştiriniz.
20. Yarıçapı  $R$  olan bir kürenin etrafına, dıştan teğet en küçük hacimli bir koni yerleştiriniz (çevreleyiniz).
21.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  elipsinin birinci dördilde öyle bir teğet çizilsin ki, koordinat eksenleriyle oluşan üçgenin alanı en küçük olsun. Teğetin değme noktasının koordinatlarını bulunuz.

**EK: TESTLER**

**TEST 1****MODÜLER BİRİM 1: DİZİLER VE İLERLEMELER**

Sunulan cevaplardan sadece biri doğrudur. Soruyu çözün ve doğru cevabı yuvarlak içinde alınız. Her soru 3 puan değerindedir.

1. Aşağıdaki dizilerden hangisi monoton olarak azalmaktadır?

- a)  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$       b)  $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \dots$       c)  $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$       d)  $\frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{12}{13}, \dots$

2. Geometrik dizilerde ortak çarpan  $q = 1/2$  ise ve dördüncü terim  $a_4 = 3$  ise, ilk terim  $a_1$  kaçtır?

- a) 8      b)  $\frac{3}{8}$       c) 24      d) 17

3.  $1\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \dots$  sonsuz geometrik serisinin toplamı nedir?

- a) 9      b) 3      c)  $\frac{3}{2}$       d)  $\frac{3}{4}$

4.  $a_1 = 2$  ve  $a_{30} = 60$  bir aritmetik dizisinin terimleri ise,  $a_5 + a_{26}$  kaçtır?

- a) 62      b) 60      c) 31      d) 32

Doğru ifade için hesaplayın ve tamamlayın. Her soru 6 puan değerindedir.

5.  $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \dots$  dizisi veriliyor. Bu dizi \_\_\_\_\_ dir, dizinin ilk terimi \_\_\_\_\_ ve ilk 5 terimin toplamı \_\_\_\_\_ dir.

6.  $a_n = (-1)^n \cdot 2^{n-1}$  genel terimiyle verilen dizinin ilk beş terimi şunlardır: \_\_\_\_\_.

7. a)  $-1$ ,  $x$  ve  $-\frac{1}{9}$  sayıları bir geometrik dizisinin üç ardışık terimi ise,  $x$ 'in değeri \_\_\_\_\_ dir.

b)  $\sin^2 30^\circ$ ,  $\sin^2 45^\circ$  ve  $\sin^2 60^\circ$  sayıları \_\_\_\_\_ dizisi oluşturur, çünkü \_\_\_\_\_.

8. 3 ve 18 sayıları arasına, verilen terimlerle birlikte aritmetik dizisi toplamı 42 olacak şekilde kaç terim eklenmelidir?

a) \_\_\_\_\_ terim eklenmelidir;

b) Dizi \_\_\_\_\_ dir.

#### Alıştırmaları çözünüz

9. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$ ;    b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n^2 + 2}} = \underline{\hspace{2cm}}$ .    c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n^2 - 1}{7 - 4n + 3n^3} = \underline{\hspace{2cm}}$  (12)

10.  $a_3 + a_6 = 20$  ve  $a_9 - a_2 = 14$  olan bir aritmetik diziyi belirtiniz. (12)

11. 1, 3, 9, 27, ... geometrik dizisinin kaç teriminin toplamı 3280 dir? (12)

12.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{3n+1}$  limit değerini bulunuz. (14)

13.  $\sqrt[3]{4\sqrt[3]{4\sqrt[3]{4}\dots}}$  ifadesinin değerini hesaplayın. (14)

Değerlendirme için önerilen kriterler:

|                      |                      |                  |                      |                       |
|----------------------|----------------------|------------------|----------------------|-----------------------|
| 0-30<br>Yetersiz (1) | 31-48<br>Yeterli (2) | 49-66<br>İyi (3) | 67-84<br>Çok İyi (4) | 85-100<br>Pek iyi (5) |
|----------------------|----------------------|------------------|----------------------|-----------------------|



## TEST 2

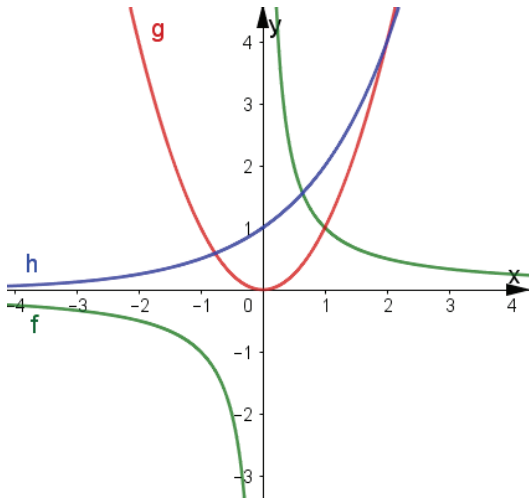
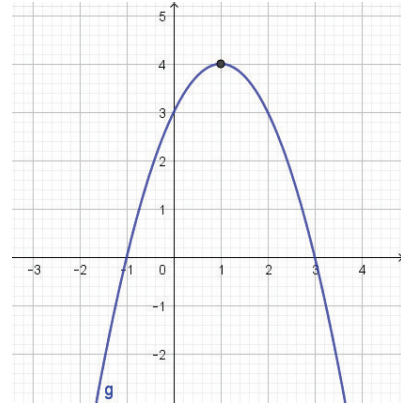
## MODÜLER BİRİM 2: TEMEL FONKSİYONLAR

Sunulan cevaplardan sadece biri doğrudur. Soruyu çözün ve doğru cevabı daire içine alın. Her soru 6 puan değerindedir.

- $f(x) = \log(x+3) - \log(4-x)$  fonksiyonunun tanım kümesi nedir?  
a)  $D_f = (-\infty, -3) \cup (4, +\infty)$    b)  $D_f = (-3, 4)$    c)  $D_f = (-3, +\infty)$    ç) Başka bir değer
- $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 9}$  fonksiyonunun  $x = -1$  için değeri nedir?  
a)  $\frac{5}{8}$    b)  $-\frac{1}{8}$    c)  $\frac{3}{8}$    ç) Başka bir değer
- $f(x) = -x^2 + 3x - 2$  fonksiyonunun sıfırları (kökleri) nelerdir?  
a) 1 ve -2   b) 1 ve 2   c) -1 ve 2   ç) Başka değerler

Doğru ifade elde etmek için hesaplayınız ve tamamlayınız. Her soru 10 puan değerindedir.

- $f(x) = ax^2 + bx + c$  ikinci dereceden fonksiyonu için:  
a) Tepe noktasının koordinatları \_\_\_\_\_;  
b) a parametresinin işareti \_\_\_\_\_ dir;  
c) Monotonluk aralıkları :  
ç) Koordinat eksenleriyle kesişim noktaları:



- Verilen  $f$ ,  $g$  ve  $h$  fonksiyonlarına hangi cebirsel ifadeler karşılık gelir?

- |             |                    |
|-------------|--------------------|
| a) $2^x$    | b) $\frac{1}{x^2}$ |
| c) $x^3$    | ç) $x^2$           |
| d) $\ln(x)$ | e) $\frac{1}{x}$   |

Alıştırmaları çözünüz

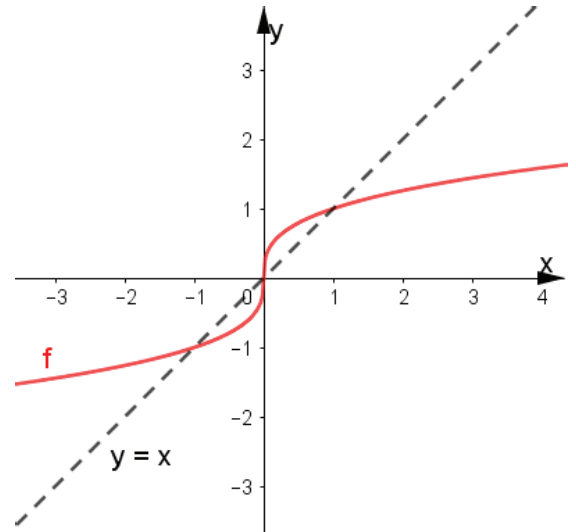
6.  $f(x) = 2 - x^3$  fonksiyonunun tanım kümesindeki monotonluğunu inceleyiniz. (12)

7.  $f(x) = ax^2 + bx + 3$  fonksiyonunu  $f(1) = 4$  ve  $f(-2) = -5$  olacak şekilde belirleyin. Grafiği neyi temsil eder? (12)

8.  $f(x) = \frac{3x}{x-1}$  fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz. (12)

9.  $f(x)$  fonksiyonunun ters fonksiyonunu çizin.

$f(x)$  fonksiyonunun ters fonksiyonunu ile ortak noktalarının koordinatlarını yazınız. (12)



10.  $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x - 4}$  fonksiyonu için şunları belirtiniz: (14)

- Tanım kümesini
- Fonksiyonun sıfırlarını
- Fonksiyonun çift ya da tekliğini
- $(4, +\infty)$  aralığındaki fonksiyonun monotonluğunu

Değerlendirme için önerilen kriterler:

|                      |                      |                  |                      |                       |
|----------------------|----------------------|------------------|----------------------|-----------------------|
| 0-30<br>Yetersiz (1) | 31-48<br>Yeterli (2) | 49-66<br>İyi (3) | 67-84<br>Çok İyi (4) | 85-100<br>Pek iyi (5) |
|----------------------|----------------------|------------------|----------------------|-----------------------|

## TEST 3

## MODÜLER BİRİM 3: FONKSİYONUN LİMİT DEĞERİ

Sunulan cevaplardan sadece biri doğrudur. Soruyu çözün ve doğru cevabı yuvarlak içine alınız. Her soru 6 puan değerindedir.

1.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x - 9} =$  limit değeri aşağıdakilerden hangisidir:

- a) 1                      b) 2                      c) -3                      ç) hiçbirisi

2.  $f(x) = \frac{3x}{x-1}$  fonksiyonu için  $x = 1$  doğrusu nedir?

- a) Yatay asimptot                      b) Dikey asimptot                      c) Eğik asimptot                      tç) hiçbirisi.

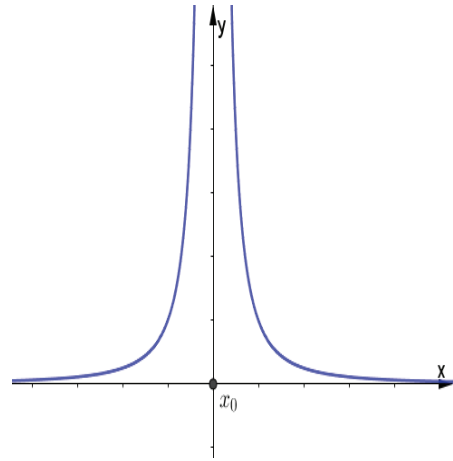
3. Fonksiyonun grafiği verilmiştir. Doğru olanı işaretleyiniz.

a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$

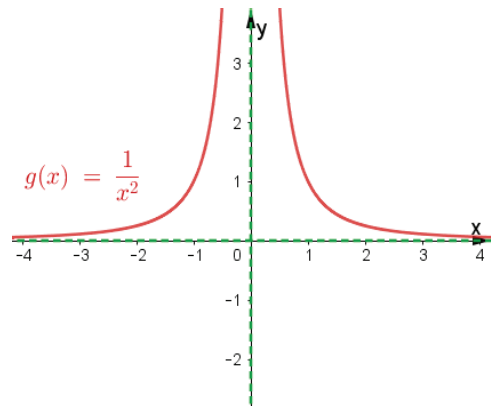
ç) Başka bir değer



İddianın doğru olması için, hesaplayarak tamamlayınız. Her soru 10 puan değerindedir.

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{6}}{x}$  limit değerini hesaplayınız.

5. Grafiği verilen fonksiyonun asimptotlarını yazınız.



6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx}$  limit değerini hesaplayınız.

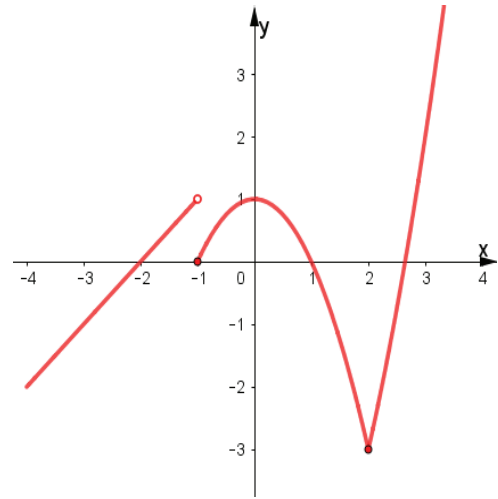
Soruları Çözüünüz:

7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3}$  limit değerini hesaplayınız. (12)

8.  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x+1}$  eğrisinin asimptotlarını belirtiniz. (12)

9.  $f(x)$  fonksiyonunun süreksizlik noktalarını bulunuz:

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x < -1 \\ 1-x^2, & -1 \leq x < 2 \\ x^2-7, & x \geq 2 \end{cases}$$



(14)

10.  $f(x)$  fonksiyonunun sürekli olması için, a ve b parametrelerinin değerlerini bulunuz:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x \leq 0 \\ ax+b, & 0 < x < 1 \\ \sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases} \quad (14)$$

Değerlendirme için önerilen kriterler:

|                      |                      |                  |                      |                       |
|----------------------|----------------------|------------------|----------------------|-----------------------|
| 0-30<br>Yetersiz (1) | 31-48<br>Yeterli (2) | 49-66<br>İyi (3) | 67-84<br>Çok İyi (4) | 85-100<br>Pek iyi (5) |
|----------------------|----------------------|------------------|----------------------|-----------------------|

## TEST 4

## MODÜLER BİRİM 4: FONKSİYONUN TÜREVİ

Sorular A ve B olmak üzere iki zorluk seviyesindedir. Her soru için A veya B seçeneklerinden birini çözün. Sadece bir seçenek puanlanır.

1. Fonksiyonun türevini bulunuz:

a)  $y = \frac{1}{5}x^5 + 3x^3 - 2\text{ctgx}$  (8)

b)  $y = \sqrt[3]{x^2} - 3^x - 4\text{tg}x$  (10)

2. Fonksiyonun türevini bulunuz:

a)  $y = 4x^5 \ln x$  (8)

b)  $y = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$  v(10)

3.

a)  $f(x) = (1-x)e^x$  fonksiyonu için ikinci türevi bulun ve  $f''(-1)$  ve  $f''(0)$  değerlerini hesaplayınız.

b)  $f(x) = 7 + 3x^2 - x^3$  fonksiyonunun monotonluk aralıklarını belirleyin. (15)

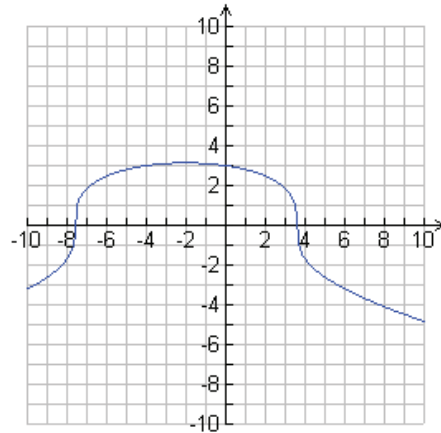
(8)

4.

a)  $y = 2x^2 - x - 7$  eğrisinin  $M(-2, y_0)$  noktasındaki teğetin denklemini yazınız

b)  $f(x) = \sqrt[3]{27 - 4x - x^2}$  fonksiyonunun  $x = -4$  apsisli noktadaki teğetin ve normalinin denklemini yazınız. Elde edilen doğruları grafikte çiziniz.

(8)



(15)

5. Bileşik fonksiyonun türevini bulunuz:

a)  $y = \ln(3x^2 - x)$

(10)

b)  $y = \ln 1 + 1 + 2x - 2x + 1$

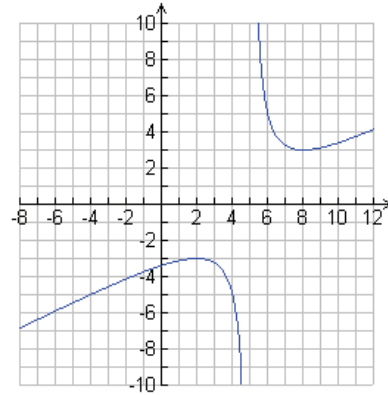
(15)

6.

a) Logaritmik türev olarak  $y = \left(\frac{x+5}{x-2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$  fonksiyonunun türevini bulunuz.

b)  $f(x) = \frac{34-10x+x^2}{2x-10}$  fonksiyonunun yerel ekstremumlarını bulun ve grafiğe göre (ikinci türevi bulmadan) ne olduklarını belirleyin. Yerel ekstremumları grafiğe işaretleyiniz.

(10)



(15)

7. Fonksiyonun değişimini inceleyiniz ve grafiğini çiziniz:

a)  $y = x^3 + x^2 - 2$

(15)

b)  $y = \frac{x^2 - 1}{4 - x^2}$

(20)

Değerlendirme için önerilen kriterler:

|                      |                      |                  |                      |                       |
|----------------------|----------------------|------------------|----------------------|-----------------------|
| 0-30<br>Yetersiz (1) | 31-48<br>Yeterli (2) | 49-66<br>İyi (3) | 67-84<br>Çok İyi (4) | 85-100<br>Pek İyi (5) |
|----------------------|----------------------|------------------|----------------------|-----------------------|

## ALİŖTİRMALARIN ÇÖZÜMLERİ

## MODÜLER BİRİM 1: DİZİLER

## 1. GERÇEK SAYI DİZİLERİNİN TANIMI VE ÖZELLİKLERİ

1. a)  $1, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{8}{17}, \frac{5}{13}$  b)  $-1, 1, -1, 1, -1$  c)  $2, 4, 8, 16, 32$  d)  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}$ ; 4. a)  $a_n = n^2$  b)  $a_n = 2^n - 1$  c)  $a_n = (-1)^{n+1}$  d)  $a_n = \frac{2}{2^{n-1}}$ .

5.  $a_n - a_{n+1} = \frac{2}{3^{n+1}} > 0$ : monoton olarak azalır ve  $a_n < 1$  - sınırlıdır; 6. monoton olarak artar ve sınırlıdır; 7. monoton olarak azalır,  $n > 2$  için ve sınırlıdır; 8. monoton olarak azalır ve sınırlıdır; 9. a) monoton olarak azalır, b) monoton olarak artar, c) ne artar ne de azalır, ç) monoton olarak azalır, d) ne artar ne de azalır; 10. a) sınırlı, b) sınırlı değil, c) sınırlı değil, ç) sınırlı, e) sınırlı.

## 2. ARİTMETİK DİZİ

1.  $a_{15} = 44$ ; 2.  $n = 15$ ; 3. 239; 4. 200; 5. После 9 години,  $n = 9$ ; 6. 3, 8, 13; 7. Во 10 месец; 8. 12, 20, 28, 36, 44, 52, 60, 68, 76, 84, 92, 100.

9. 14, 8, 2, -6, ...; 10. a) -14, -12, -10, -8, -6, ... b) 7, 10, 13, 16, 19, ...; 11. a)  $a_8 = 25$  b)  $a_9 = -\frac{3}{2}$  c)  $a_{12} = 46$  d)  $a_{15} = 15a + b$

## 3. ARİTMETİK DİZİSİNİN İLK n- TERİMİNİN TOPLAMI

1.  $a_{25} = 101$  и  $S_{25} = 1325$ ; 2. 8, 5, 2, -1, -4, ...; 3.  $n = 9$ ; 4.  $x = 39$ ; 5.  $S_{100} = 3000$ ; 6. İlk kişi 1750 dinar, son kişi 6250 dinar aldı; 8.  $a_n = 10 + 10(n - 1) = 10n$ ;

9. 4 veya 9 terim; 10. 21 terim; 11. -16, 16, 48, 80

## 4. GEOMETRİK DİZİ

1.  $a_{10} = \frac{1}{64}$ ; 2.  $a_{20} = 3^{19}$ ; 3.  $a_1 = \frac{1}{64}$ ; 4.  $a_1 = 6, q = 3$ ;  $a_1 = -6, q = -3$ ; 5. 2, -4, 8, -16, 32, ...; 6.  $b = \pm 15$

7.  $a_1 = 3, q = 2$  3, 6, 12, 24, 48, ...; 8. -4, 2, -1,  $\frac{1}{2}$ , ...; 9.  $a_1 = 5, q = 2$ ;  $a_1 = -15, q = -2$

10.  $a_1 = 1, q = 5$ ;  $a_1 = 1, q = -5$ ; 11.  $\frac{13}{3}, \frac{26}{3}, \frac{52}{3}, \frac{104}{3}, \frac{208}{3}, \dots$

## 5. GEOMETRİK İLERLEMENİN İLK n TERİMİNİN TOPLAMI

1.  $a_1 = 7$ ; 2.  $S_{10} = 14762$ ; 3.  $S_8 = 1530$ ; 4.  $S_{15} = -65534$ ; 5. a) 6561 euro b) 3487 euro; 6.  $q = 2, n = 6$ ; 7.  $n = 6, a_6 = -486$

8. a)  $a_1 = \frac{3}{8}, S_5 = \frac{55}{216}$  b)  $n = 6, S_6 = -\frac{481}{15552}$ ; 9.  $a_1 = 1, q = 3, n = 4$ ; 10.  $\frac{1}{2}, 1, 2$ ; 11. 139

## 6. DİZİNİN LİMİT DEĞERİ

1.  $n > 124$ ; 2.  $n > 10$ ; 3.  $n > 100$ ; 4.  $n > 29$ ; 5.  $n > 5$ ; 7.  $n > 16$ ; 8.  $n > 149$ ; 9.  $n > 39$ ; 10.  $n > 5$ ; 11. a)  $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}, \dots$  e) hayır, f) evet, g)  $n > 1000$

## 7. YAKINSAK DİZİLERLE İŞLEMLER

1. 2; 2.  $-\frac{1}{2}$ ; 3. 1; 4.  $\frac{1}{3}$ ; 5. 0; 6. 0; 7.  $+\infty$ ; 8.  $\frac{1}{3}$ ; 9. 5; 10.  $+\infty$ ; 11. 0; 12.  $\frac{1}{3}$ ; 13. 0; 14. e; 15.  $e^{-3}$ ; 16. 1; 17. -2; 18. e;

## 8. SONSUZ GEOMETRİK DİZİSİNİN TERİMLERİNİN TOPLAMI

1.  $\frac{3}{4}$ ; 2.  $\frac{20}{3}$ ; 3.  $\frac{92}{3}$  İki sonsuz geometrik dizinin toplamını kullanın; 4.  $\frac{2}{5}$ ; 5. 5; 6. a)  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ , b) 12; 7.  $\sqrt{5}$ , 8.  $3\sqrt[3]{147}$

9.  $\frac{322}{99}$ ; 10.  $\frac{1307}{300}$ ; 11.  $\frac{3391}{990}$

## TEKRARLAMA VE PRATİK UYGULAMA ALIŞTIRMALARI

1. Monoton olarak artar ve sınırlıdır; 2.  $n \geq 2$  ve için monoton olarak azalır ve sınırlıdır; 3. 6, 10, 14, 18, 22; 4. 10 terim; 5.  $a_1 = 3, q = 2$ ; 6. Model B ile 420 dinar ödeyecek; 7. İlk modelle 2720 euro, ikinci modelle 2536.48 euro; 8. İkinci model. İlk modelle 10500 dinar, ikinci modelle 16383 dinar kazanılacak; 9. İlk 9500 dinar, son 500 dinar; 10. 120, 480 ve 15360 bakteri; 11. 62; 12. 168. Sonsuz geometrik dizinin toplamını kullanın. Top aşağı inerken biri, yukarı çıkarken diğeri; 13. 35 dolar; 14. 1120000 örnek; 15. 1126 yabancı hayvan; 16. 33 tuğla; 17. 78 lego tuğla. 18. Kenarlar 4, 6, 9. İpucu: Kısaltılmış formül  $1 + q^2 + q^4 = (1 + q^2 + q)(1 + q^2 - q)$  kullanın.

19. a) 5, b) 0; 20.  $\frac{124}{999}$



## Modüler Birim 2: TEMEL FONKSİYONLAR

## 1. FONKSİYON KAVRAMI

## 1.1. FONKSİYONUN TANIM KÜMESİ

Alıştırma 1. a)  $D_f = R$  b)  $D_f = R \setminus \{-1, 4\}$  c)  $D_f = (-\infty, 4)$  d)  $D_f = R \setminus \{2\}$  e)  $D_f = \left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$  f)  $D_f = R$ ;

## 1.2. FONKSİYONUN SIFIRLARI

Alıştırma 2. a)  $N_f = \{-2, 2\}$  b)  $N_f = \{-1, 0, 1\}$  c)  $N_f = \emptyset$  d)  $N_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  e)  $N_f = \emptyset$  f)  $N_f = \{0, 1, 2\}$ .

## 1.3. FONKSİYONUN ÇİFTLİĞİ

Soru 3. a) Çift, b) Tek, c) Ne çift ne tek, d) Ne çift ne tek, e) Çift, f) Tek

## 1.4. FONKSİYONUN SINIRLILIĞI

Soru 4. a)  $0 < \frac{1}{1+x^2} < 1$  - sınırlı, b)  $0 < \frac{x^2}{1+x^2} < 1$  - sınırlı

## 1.5. FONKSİYONUN MONOTONLUĞU

Soru 5. a) Monoton artan, b) Monoton azalan, c) Tanım kümesinde monoton artan, d) Monoton azalan, e) Monoton artan, f) Tanım kümesinde monoton azalan

## TEKRARLAMA ALİŞTIRMALARI:

1. a)  $D_f = R$  b)  $D_f = R$  c)  $D_f = R \setminus \{-3, 3\}$ ; 2. a)  $D_f = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$  b)  $D_f = R$ ; 3. a)  $D_g = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$  b)  $D_f = (1, 5]$   
 4. a)  $D_f = R \setminus \{0, 5\}$  b)  $D_f = R \setminus \{1, 3\}$  c)  $D_f = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$  d)  $D_f = (4, +\infty)$  e)  $D_f = (-3, 3)$  f)  $D_f = (-4, 4)$   
 5. 9, 6, 4,  $2a^2 - 3a + 4$ ; 6.  $f(x) = -2x - 1$ ; 7.  $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ ; 8. a)  $N_f = \{1, 2\}$  b)  $N_f = \left\{\frac{2}{3}\right\}$ ; 9. a)  $N_f = \{-2, -1, 0, 1\}$   
 b)  $N_f = \{3\}$ ; 10. a)  $N_f = \{-2, 2\}$  c)  $N_f = \{-1 - \sqrt{10}, -1 + \sqrt{10}\}$  11. a)  $D_f = R$ ,  $N_f = \{-4, 2\}$  b)  $D_f = R \setminus \{4\}$ ,  $N_f = \left\{1, \frac{3}{2}\right\}$   
 c)  $D_f = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$ ,  $N_f = \{-4, 4\}$  d)  $D_f = R$ ,  $N_f = \{2\}$ ; d)  $D_f = (-2, +\infty)$ ,  $N_f = \{998\}$

12. a) Tek, b) Çift, c) Ne çift ne tek; 13. a) Çift, b) Çift, c) Ne çift ne tek, d) Tek, e) Ne çift ne tek, f) Çift; 14. a) Monoton artan, b) Monoton artan, c) Monoton azalan, d) Monoton artan, e) Monoton azalan;

15. a) Sınırlı, b) Sınırlı, c) Sınırlı, d) Sınırlı, e) Sınırlı, f) Sınırlı; 16. a)  $(f \circ g)(x) = 9x^2 - 12x + 5$ ,

$(g \circ f)(x) = -1 - 3x^2$  b)  $(f \circ g)(x) = \sin(x^2)$  c)  $(g \circ f)(x) = \sin^2 x$  d)  $(f \circ g)(x) = \frac{x+7}{+5}$ ,  $(g \circ f)(x) = \frac{1}{2x+6}$

e)  $(f \circ g)(x) = \lg \sqrt{x}$ ,  $(g \circ f)(x) = \sqrt{\lg x}$ ; 17. a)  $f(x) = 3x - 7$  b)  $f(x) = 4 - x^2$  c)  $f(x) = \sin x$

## 2. DOĞRUSAL FONKSİYON

1. a)  $A(0, 1)$  ve  $B(-1, 0)$  b)  $A(0, 3)$  ve  $B(3, 0)$  c)  $A(0, 2)$  ve  $B(-6, 0)$  d)  $A(0, -1)$  ve  $B(1, -1)$ ;

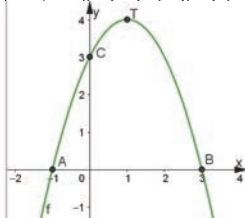
2. a)  $y = 2$  b)  $x = -3$  c)  $y = x + 5$  d)  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ; 3. a)  $y = -3x - 1$  b)  $y = \frac{1}{2}x$ ; 4. a)  $y = x$  b)  $y = -x$

## 3. İKİNCİ DERECEDEKİ FONKSİYON

1. a)  $T(-1, -1)$ ,  $A(-2, 0)$ ,  $B(0, 0)$ ,  $C(-3, 3)$  ve  $D(1, 3)$ ; b)  $T(3, -4)$ ,  $A(1, 0)$ ,  $B(5, 0)$ ,  $C(0, 5)$  ve  $D(6, 5)$ ; c)  $T(0, -4)$ ,  $A(-2, 0)$ ,  $B(2, 0)$ ,  $C(-1, -3)$  ve  $D(1, -3)$ ;

2. a)  $D_f = R = (-\infty, +\infty)$ , b)  $A(-1, 0)$ ,  $B(3, 0)$ , c)  $T(1, 4)$ , ve  $y_{\max} = 4$ ,  $x = 1$  için, d)  $V_f(-\infty, 4]$ , e)  $x \in (-\infty, 1)$  için artan,  $x \in (1, +\infty)$  için

$f(x) = -x^2 + 2x + 3$   
 $B = (3, 0)$   
 $A = (-1, 0)$   
 $C = (0, 3)$   
 $T = (1, 4)$

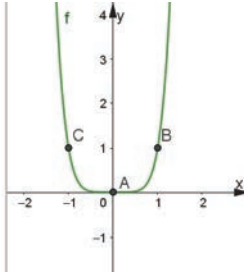


3.  $f(x) = x^2 + 1$

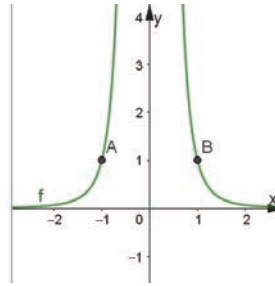
4.  $f(x) = x^2 - 3x + 1$

## KUVVET FONKSİYONU

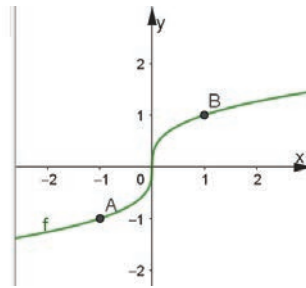
1. a)  $f(x) = x^6$   
 $A = (0, 0)$   
 $B = (1, 1)$   
 $C = (-1, 1)$



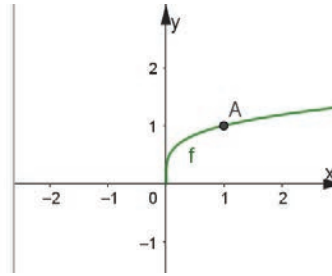
b)  $f(x) = x^{-4}$   
 $B = (1, 1)$   
 $A = (-1, 1)$



2. a)  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$   
 $B = (1, 1)$   
 $A = (-1, -1)$

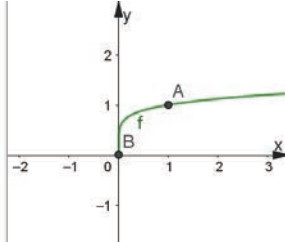


b)  $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$   
 $A = (1, 1)$



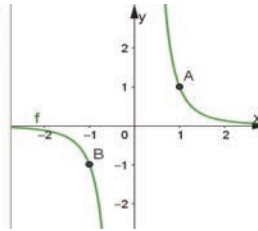
3. a)  $D_f = [0, +\infty)$  b) evet c)  $V_f = [0, +\infty)$  ç) alttan sınırlı  $0 \leq x^{\frac{1}{6}} < +\infty$

d)  $f(x) = x^{\frac{1}{6}}$   
 $A = (1, 1)$   
 $B = (0, 0)$



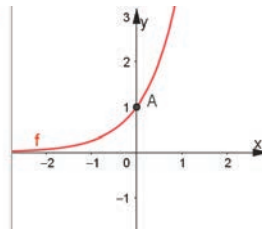
4. a)  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  b) hayır c)  $V_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ç) hayır

d)  $f(x) = x^{-3}$   
 $A = (1, 1)$   
 $B = (-1, -1)$

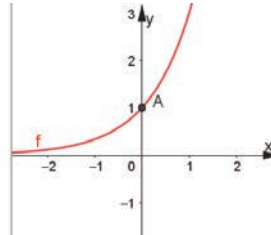


## 4. ÜSTEL FONKSİYON

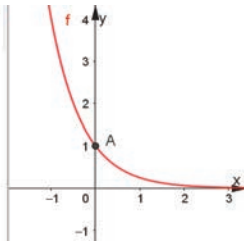
1. a)  $f(x) = 4^x$   
 $A = (0, 1)$



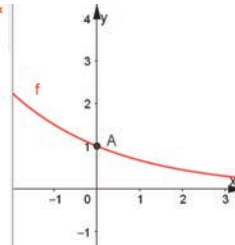
b)  $f(x) = 3^x$   
 $A = (0, 1)$



2. a)  $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$   
 $A = (0, 1)$



b)  $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$   
 $A = (0, 1)$

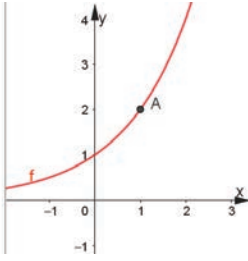


3. a)  $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$  b)  $D_f = \mathbb{R}, V_f = (0, +\infty)$  c) alttan sınırlı,  $f(x) > 0$

ç)  $a > 1$  için fonksiyon tüm tanım aralığında monoton artandır  $0 < a < 1$  için, fonksiyon tüm tanım aralığında monoton eksilendir

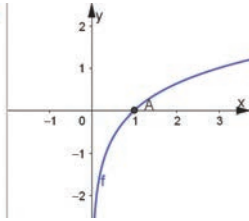
d) sıfırları yoktur

4.  $f(x) = 2^x$   
A = (1, 2)

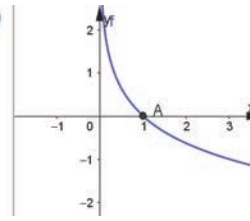


#### 6. LOGARITMA FONKSİYONU

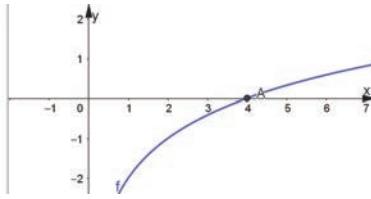
1. a)  $f(x) = \log_3(x)$   
A = (1, 0)



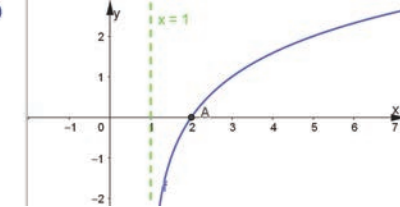
b)  $f(x) = \log_3(x)$   
A = (1, 0)



2. a)  $f(x) = -2 + \log_2(x)$   
A = (4, 0)

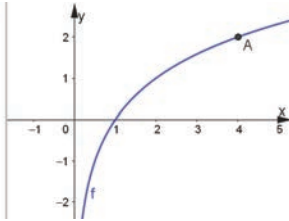


b)  $f(x) = \log_2(x - 1)$   
g: x = 1  
A = (2, 0)



3. a)  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  b)  $D_f = (0, +\infty)$  ve  $V_f = \mathbb{R}$  c) Hayır ç)  $a > 1$  için fonksiyon tüm tanım aralığında monoton artandır  $0 < a < 1$  için ise, tüm tanım kümesinde monoton eksilendir d) Evet;

4.  $f(x) = \log_2(x)$   
A = (4, 2)



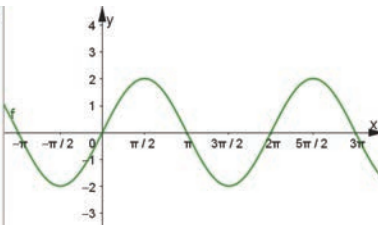
#### 7. TERS FONKSİYON KAVRAMI

1. a)  $f^{-1}(x) = \frac{4}{3} - 2x$  b)  $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ ; 2. a)  $f^{-1}(x) = (x-1)^3$  b)  $f^{-1}(x) = 2 + \log(x-3)$ ; 4.  $a = 1$ ,  $b = 0$  veya  $a = -1$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ;

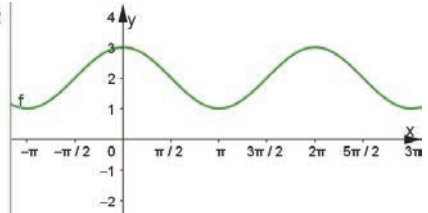
5. a)  $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{x}$  b)  $f^{-1}(x) = x^2 - 1$ ,  $x \in [0, +\infty)$  c)  $f^{-1}(x) = \log_2(x+1)$ ,  $x \in (1, +\infty)$  ç)  $f^{-1}(x) = e^{x-1} - 2$  d)  $f^{-1}(x) = \frac{2-2x}{1+x}$

#### 8. TEMEL TRIGONOMETRİK FONKSİYONLAR

1. a)  $f(x) = 2 \sin(x)$



b)  $f(x) = \cos(x) + 2$



2. a) Evet, b) Evet, c) Evet; 3. a) çifttir, b) tektir c) ne çift ne de tektir

TEKRARLAMA ALİŞTIRMALARI VE PRATİK UYGULANMASI.

1. a)  $D_f = R$  b)  $D_f = R \setminus \{-4, 1\}$ , c)  $D_f = (-2, 2)$ ; 2. a)  $N_f = \emptyset$  b)  $N_f = \{-1, 1\}$ , c)  $N_f = \{0\}$ ; 3.  $f(x) = 2x - 2$

4. a) çifttir, b) tektir, c) çifttir; 5. a)  $f^{-1}(x) = \frac{8}{9} - \frac{4}{3}x$ , b)  $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2x-1}$ , c)  $f^{-1}(x) = (x+2)^3$ , ç)  $f^{-1}(x) = \frac{e^{2x}-1}{2e^x}$ ;

6. a)  $f(-2) = 1$ ,  $f(0) = 2$ ,  $f(3) = \frac{7}{2}$ , b)  $(-4, 0)$ ,  $(0, 2)$  ç) artandır  $x \in R$  d)  $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$  e) için  $x = -2$  f) için  $x \in (-\infty, -6)$ ;

7. a)  $f(-2) = 5$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f(3) = -5$  b)  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ,  $(0, 1)$  ç) azalan  $x \in R$  d)  $(-\infty, -5)$  dh) için  $x \in (3, +\infty)$ ; 8. a) Hayır, b) eksilen  $x \in R$

c)  $f(2) = -1$ ,  $f(-1) = 2$  ç)  $(3, +\infty)$  d) için  $x=2$  dh) için  $x \in (-4, 0)$ ; 9. a) için  $x = 0$  için en büyük değeri vardır b) artan  $x \in (-\infty, 0)$ , eksilen  $x \in (0, +\infty)$  c)  $f(1) = 2$ ,  $f(0) = 4$  ç)  $(0, 2)$  d) hiçbirini yok dh) için  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ; 10. a) yoktur ka b) eksilen  $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

c)  $f(1) = 0$ ,  $f(0) = 1$  ç)  $(-\infty, -1)$  d) için  $x = 0$  dh) için  $x \in (-\infty, -1)$

Modüler birim 3 – FONKSİYONUN LİMİT DEĞERİ

1. FONKSİYONUN LİMİT DEĞERİ KAVRAMI

1. a) 19, b)  $\frac{1}{5}$ ; 2. a)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$  b)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$  c)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

ç)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$  d)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  dh)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ ; 3. a) 2, b) iraksaktır, c) 2,

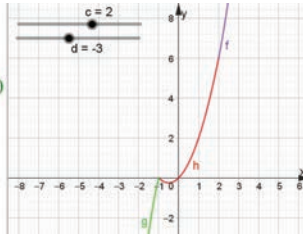
ç) iraksaktır, d)  $\frac{1}{2\sqrt{6}}$  dh)  $3\sqrt[3]{b^2}$ ; d) 3; 4. a)  $-\frac{3}{2}$  b)  $\frac{5}{9}$  c)  $\frac{1}{32}$  ç) iraksaktır d) 1, e) 2, f) 1; 5. a) 2, b)  $\frac{3}{4}$  c) 0, ç)  $+\infty$  d) 1, ve) 0,

e)  $-\frac{b}{2}$ ; 6. a) -2, b) -3, c) -1;

2. FONKSİYONUN SÜPERKLİLİĞİ

2. a) 0, b) 1, c) -1; 4.  $a = 1$ ; 5.  $b = -3$ ;

6.  $c = 2$ ,  $d = -3$   
 $h(x) = x^2 + x$ ,  $(-1 \leq x \leq 2)$   
 $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ ,  $(2 \leq x < \infty)$   
 $g(x) = 1 - 2x - 3x^2$ ,  $(-\infty \leq x \leq -1)$



3. EĞRİLERİN ASİMPTOTLARI

1.  $x = 0$  dikey asimptottur,  $y = 1$  yatay asimptottur; 2.  $x = -4$  dikey asimptottur,  $y = 1$  yatay asimptottur;

3.  $x = 1$  dikey asimptottur,  $y = x + 1$  eğik asimptottur; 4.  $x = 2$  dikey asimptottur,  $y = x + 7$  eğik asimptottur; 5.  $x = 0$  dikey asimptottur,  $y = 2$  yatay asimptottur; 6.  $x = 1$ ,  $x = 2$  dikey asimptotlardır,  $y = 1$  yatay asimptottur; 7.  $x = 0$  dikey asimptottur,  $y = x + 1$  eğik asimptottur; 8.  $x = -2$ ,  $x = 2$  dikey asimptotlardır,  $y = -x$  eğik asimptottur; 9.  $y = 0$  yatay asimptottur; 10.  $y = -1$ ,  $y = 1$  yatay asimptotlardır; 11.  $y = (x/3) - (1/2)$  eğik asimptottur; 12.  $y = 0$  yatay asimptottur; 13.  $y = -2$  yatay asimptottur; 14.  $y = (1/2)$  yatay asimptottur; 15.  $x = -2$ ,  $x = 2$  dikey asimptotlardır,  $y = 0$  yatay asimptottur.

4. TEMEL FONKSİYONLARIN LİMİTLERİ. TEMEL FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİNİN ASİMPTOTLARI

1. a) Yoktur, b)  $x = 0$  dikey asimptottur,  $y = 0$  yatay asimptottur, c)  $y = 0$  yatay asimptottur;

2. a) Yoktur, b) Yoktur, c) Yoktur, ç) Yoktur, d)  $x = 0$  dikey asimptottur,  $y = 10$  yatay asimptottur, e) Yoktur, f)  $x = 0$  dikey asimptottur, g)  $x = 0$  dikey asimptottur, ğ)  $y = 0$  yatay asimptottur, h)  $y = 0$  yatay asimptottur.

## 5. Özel Limit Değerleri

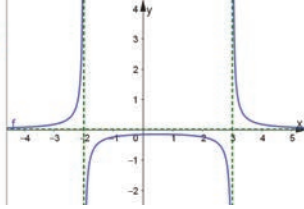
1. a)  $\frac{4}{7}$ , b)  $\frac{1}{2}$  2. a) 4, b),  $\frac{a}{b}$ ,  $b \neq 0$ ; 3. a)  $e$  b)  $e^{-3}$  4. a)  $e^{-\frac{4}{3}}$  b)  $e^4$

## TEKRARLAMA ALİŞTIRMALARI VE PRATİKTE UYGULAMA

1. a) 9, b)  $\frac{13}{14}$ ; 2. a)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$  b)  $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty$ ; 3. a)  $\frac{1}{2}$ , b) 1, c)  $\frac{1}{3}$  d)  $\frac{8}{3}$  2, e)  $\frac{1}{4}$  f) -2,  
g)  $-\frac{1}{3}$ , ğ)  $\frac{2}{3}$ ; 4. a) 3, b)  $-\frac{1}{4}$ , c)  $-\frac{1}{2}$ ; 5. a)  $\frac{2}{3}$ , b) -1, c) 1; 6. a)  $\frac{1}{3}$ , b)  $\frac{7}{4}$ , c)  $\frac{2}{5}$ , d)  $\frac{1}{2}$ , e)  $e^4$ , f)  $e^{-4}$ , g)  $e^2$ , ğ)  $\frac{1}{e}$ ;  
8. a) için  $x = -2$ ,  $x = 3$  b)  $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, +\infty)$  c)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$  d)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$   
d) üçten

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6}$$

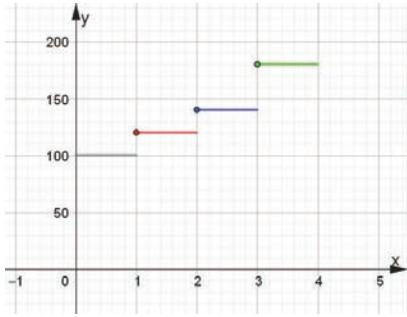
$$H = \{y = 0, x = -2, x = 3\}$$



9. a)  $x = -1$  dikey asimptot,  $x = -1$  yatay asimptot; b)  $x = 1$ ,  $x = -1$  dikey asimptotlar,  $y = 1$  yatay asimptot; c)  $x = 0$  dikey asimptot,  $y = -x$  eğik asimptot;

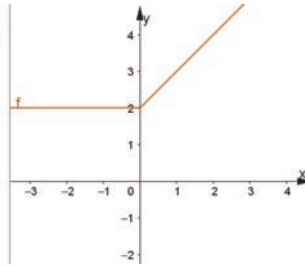
10. a)  $f(0,75) = 100$ ,  $f(1) = 120$ ,  $f(3,5) = 180$  b) Yoktur; c)  $D_f = (0, 4)$ ; ç) Evet;

d)

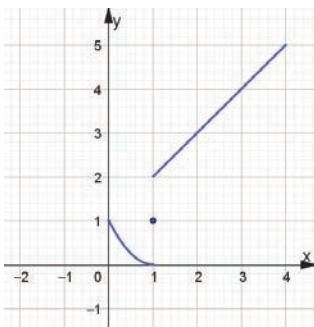
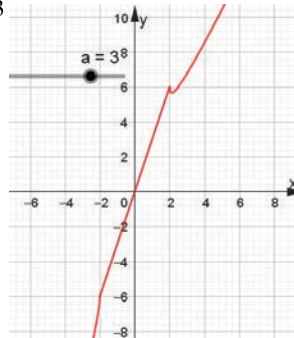


11.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & : x < 0 \\ x + 2 & : x \geq 0 \end{cases}$$



12.

13. Mevcut değil; 14.  $a = 0$  ; 15.  $a = 3$ 

## Modüler Birim 4: FONKSİYONUN TÜREVİ

## 1. BİR NOKTADA FONKSİYONUN TÜREVİNİN TANIMI

1. a) 0.5, b) 0.791, c) 0.0033, ç) -0.045; 2. a) 2,  $f'(-2) = 2$  b)  $-\frac{2}{x^3}$ ,  $f'(1) = -2$  c)  $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ ,  $f'(3) = \frac{1}{4}$  3)  $3x^2$ ,  $f'(-1) = 3$ ;  
3. a) 5, b)  $\frac{2}{x^3}$  c)  $6x + 2$  ç)  $-\frac{2}{(x-1)^2}$ ; 4. a)  $2^x \ln 2$ ,  $f'(0) = \ln 2$  b)  $\frac{1}{x}$ ,  $f'(e) = \frac{1}{e}$  c)  $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ ,  $f'(3) = \frac{1}{4}$   
ç)  $\frac{4x}{(1-x^2)^2}$ ,  $f'(0) = 0$ ; 5. İpucu: Tanımdan türev hesaplayın ve  $x$ 'in uygun değerlerinde  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$  olduğunu gösteriniz.

## 2. TEMEL FONKSİYONLARIN TÜREVİNİN BELİRTİLMESİ

1. a)  $7x^6$ , b)  $\frac{2}{5\sqrt[3]{x^3}}$ , c)  $0, \zeta) -\frac{4}{x^5}$ ; 2. a)  $7^x \ln 7$ , b)  $\frac{1}{x \ln 7}$ , c)  $\frac{1}{x}$ ,  $\zeta) -\frac{1}{\sin^2 x}$ ; 3. a)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x \ln \frac{1}{2}$ , b)  $\frac{1}{x \ln 3}$ , c)  $-\sin x$ ,  $\zeta) \frac{1}{\cos^2 x}$ ;  
4. a)  $e^x$ , b)  $\frac{1}{1+x^2}$ , c)  $1$ ,  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ; 5. a)  $6^x \ln 6$ , b)  $-\frac{1}{1+x^2}$ , c)  $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$ ,  $\zeta) -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ;

## 3. BİR TOPLAM FARK ÇARPIM VE BÖLÜMÜN TÜREVİ

1. 5; 2.  $3x^2 - 4x + 3$ ; 3.  $3x^2 - 3$ ; 4.  $12x^3 - 18x^2 + 2x - 4$ ; 5.  $1 - \frac{1}{x^2}$ ; 6.  $-\frac{2}{x^3} + \frac{12}{x^5}$ ; 7.  $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ ; 8.  $2x - 2 \cos x$ ;  
9.  $2 \cos x - 4 \sin x$ ; 10.  $\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + 5^x \ln 5$ ; 11.  $4x^3 \ln x + x^3$ ; 12.  $3x^2 \cos x - x^3 \sin x$ ; 13.  $2 \sin x + 2x \cos x$ ;  
14.  $12x^{11}e^x \operatorname{tg} x + x^{12}e^x \operatorname{tg} x + \frac{x^{12}e^x}{\cos^2 x}$ ; 15.  $e^x \arcsin x + \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}$ ; 16.  $36x^5 - 60x^4 + 8x^3 - 30x^2 + 24x - 2$ ;  
17.  $2x - \cos^2 x + \sin^2 x$ ; 18.  $-\frac{1}{x^2}$ ; 19.  $\frac{x^2 - 2x - 1}{(x^2 + 1)^2}$ ; 20.  $\frac{-3x^2 - 2x - 3}{(x^2 - 1)^2}$ ; 21.  $\frac{-x^2 + 2x - 4}{(x^2 - 4)^2}$ ; 22.  $\frac{-x^2 - 6x - 4}{(x^2 - 4)^2}$ ;  
23.  $\frac{4x - 4}{(x^2 - 2x)^2}$ ; 24.  $\frac{2 \cos x}{(1 - \sin x)^2}$ ; 25.  $\frac{e^x (\sin x + x \sin x - x \cos x)}{\sin^2 x}$ ; 26.  $\frac{\sin x - x}{1 - \cos x}$ ; 27.  $2 \cos x - \frac{1}{2}e^x + \frac{7}{x^2 + 1}$ ;  
28.  $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{6}{x^3} + \frac{3}{4x^4}$ ; 29.  $\frac{2}{1 + \sin(2x)}$ ; 30.  $-\frac{e^x + \cos x + x \sin x + x \cos x}{x^2 e^x}$ ; 31.  $\frac{6}{7\sqrt{x}} + \frac{1}{x \ln 6} - \frac{1}{\cos^2 x}$ ;  
32.  $x^3 e^x (4 \sin x + x \sin x + x \cos x)$ ; 33.  $\frac{x^2 - 10x + 16}{2(x - 5)^2}$ ; 34.  $\frac{x \cos x - x \sin x - e^x - \sin x}{x^2 e^x}$ ; 35.  $\frac{\cos x - x \ln x \sin x - 2 \ln x \cos x}{x^3}$ ;  
36.  $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ; 37.  $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ; 38.  $\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x \cdot \sqrt{x}}{\cos^2 x} + \frac{\ln x \cdot \operatorname{tg} x}{2\sqrt{x}}$ ; 39.  $\frac{(1 + \sqrt[3]{x})^2 (\sqrt[3]{x} - 1)}{2x\sqrt{x}}$ ; 40.  $\frac{7}{8\sqrt{x}}$

## 4. BİLEŞİK FONKSİYONUN TÜREVİ

1.  $15(5x - 7)^2$ ; 2.  $\frac{3}{2\sqrt{3x - 5}}$ ; 3.  $(2x - 2)e^{x^2 - 2x + 5}$ ; 4.  $\frac{2}{2x - 9}$ ; 5.  $\frac{2}{x(1 - x^2)}$ ; 6.  $\frac{1}{x^2 - 1}$ ; 7.  $\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ ; 8.  $\sin x^4 + 4x^4 \cos x^4$ ;  
9.  $5x^4 \cos x^5$ ; 10.  $5 \sin^4 x \cdot \cos x$ ; 11.  $-3 \cos^2 x \cdot \sin x \cdot \cos x^3 - 3x^2 \cdot \cos^3 x \cdot \sin x^3$ ; 12.  $\frac{-1 + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x}$ ; 13.  $\frac{18(x - 3)^2}{(x + 3)^4}$ ;  
14.  $\frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}$ ; 15.  $\frac{x \cos(\sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}}$ ; 16.  $\frac{1}{2(1 - x^2)}$ ; 17.  $(2x - 2) \operatorname{ctg}(x^2 - 2x + 2)$ ; 18.  $-\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$ ; 19.  $\frac{8x}{16 - x^4}$ ; 20.  $\frac{-3x^2 - 2x - 3}{(x^2 - 1)^2}$ ;  
21.  $\frac{-x^2 + 2x - 4}{(x^2 - 4)^2}$ ; 22.  $\frac{-x^2 - 6x - 4}{(x^2 - 4)^2}$ ; 23.  $\frac{4x - 4}{(x^2 - 2x)^2}$ ; 24.  $\frac{2 \cos x}{(1 - \sin x)^2}$ ; 25.  $\frac{e^x (\sin x + x \sin x - x \cos x)}{\sin^2 x}$ ;

## 5. LOGARİTMALİ TÜREVLE

1.  $-\frac{1}{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^5}} \left( \ln \left( 1 + \frac{1}{x^5} \right) + \frac{5}{x^5 + 1} \right)$ ; 2.  $-\frac{1}{(x - 2)^2} \left( \frac{x + 7}{x - 2} \right)^{\frac{1}{x - 2}} \left( \ln \left( \frac{x + 7}{x - 2} \right) + \frac{9}{x + 7} \right)$ ; 3.  $-\frac{1}{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^7}} \left( \ln \left( 1 + \frac{1}{x^7} \right) + \frac{7}{x^2 + 1} \right)$ ;  
4.  $-\frac{1}{(x + 4)^2} \left( \frac{x + 5}{x + 4} \right)^{\frac{1}{x + 4}} \left( \ln \left( \frac{x + 5}{x + 4} \right) + \frac{1}{x + 5} \right)$ ; 5.  $(\sin x)^{\sin^2 x} (\sin(2x) \cdot \ln(\sin x) + \sin x \cdot \cos x)$ ;  
6.  $(\sin x)^{\cos x} (\operatorname{ctg} x \cdot \cos x - \sin x \cdot \ln(\sin x))$ ; 7.  $\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2} (1 - \ln x)$ ; 8.  $(\ln x)^x \left( \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right)$ ; 9.  $\left( 1 - \frac{1}{x + 1} \right)^x \left( \ln \left( 1 - \frac{1}{x + 1} \right) + \frac{1}{x + 1} \right)$ ;  
10.  $x^{x+1} (x + 1) \left( \ln x + \frac{x + 1}{x} + \frac{1}{x + 1} \right)$ ; 11.  $x^{x^x} (x^x \ln x (\ln x + 1) + x^{x-1})$ ; 12.  $\left( \frac{\ln x}{x} \right)^{\cos x} \left( \frac{\cos x (1 - \ln x)}{x \ln x} - \sin x \ln \left( \frac{\ln x}{x} \right) \right)$ ;  
13.  $\frac{x + 3}{(x - 7)^4 \sqrt{(x + 2)^3}} \left( \frac{1}{x + 3} - \frac{1}{x - 7} - \frac{3}{4(x + 2)} \right)$ ; 14.  $\frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt[3]{(x + 2)^2} \cdot \sqrt[4]{(x + 3)^3}} \left( \frac{1}{2(x - 1)} - \frac{2}{3(x + 2)} - \frac{3}{4(x + 3)} \right)$ ;  
15.  $\frac{(1 - x^2) \cdot e^{3x-1} \cdot \cos x}{\sin^3 x} \left( 3 - \frac{2x}{1 - x^2} - \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x \right)$ ; 16.  $\sqrt{(x + 1)^3} \cdot \frac{2x - 1}{x + 2} \cdot e^{x^2} \cdot \sin^4 x \cdot \cos^3 x \left( \frac{3}{2(x + 1)} + \frac{2}{2x - 1} - \frac{1}{x + 2} + 2x + 4 \operatorname{ctg} x - 3 \operatorname{tg} x \right)$

## 6. TÜREV UYGULAMALARI, FONKSİYONUN TEĞET VE NORMALİNİN DENKLEMİ

1.  $t: y = -2x + 3$ ,  $n: y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ; 2.  $t: y = x + \frac{1}{4}$ ; 3.  $t: y = 2x - \frac{1}{4}$ ; 4. a)  $A\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$  b)  $B(0, 2)$ ; 5.  $n: y = -\frac{1}{7}x + \frac{36}{7}$ ;  
 6. a)  $t: y = 3$ ,  $n: x = 2$  b)  $t: y = x\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4}$ ,  $n: y = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}x - \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$  c)  $t: x = 3$ ,  $n: y = 0$ ; 7.  $n: y = x - \frac{3}{e^2}$ ; 8. a)  $k_t = 4$ ,  $k_n = -\frac{1}{4}$ ,  
 b)  $k_t = \sqrt{10}$ ,  $k_n = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ ; 9. a)  $A(2, \ln 2)$ , b)  $B\left(\frac{1}{2}, -\ln 2\right)$ ; 10.  $A(1, 0)$  ve  $B(1, -1)$ ;

## 7. FİZİKTE TÜREVİN UYGULANMASI

1. a)  $32m/s$ ,  $40m/s^2$  b)  $1120m/s$ ,  $232m/s^2$ ; 2. a)  $29.43m/s$ ,  $9.81m/s^2$  b)  $9.81m/s$ ,  $9.81m/s^2$ ; 3. 1s;  
 4. a)  $v(t) = t^3 - 12t^2 + 32t$ , b) 4s; 5. 4s.

## 8. TÜREV UYGULAMALARI, FONKSİYONUN DEĞİŞİMİ VE GRAFİĞİNİN İNCELENMESİ

## FONKSİYONUN MONOTONLUĞUNU İNCELEME

1. a)  $x \in (-\infty, 0)$  için artan,  $x \in (0, +\infty)$  için azalan; b)  $x \in (3, +\infty)$  için artan,  $x \in (-\infty, 3)$  için azalan; c)  $x \in (1, +\infty)$  için artan,  $x \in (-\infty, 1)$  için azalan;  
 ç)  $x \in (-\infty, 2)$  için artan,  $x \in (2, +\infty)$  için azalan; 2. a)  $x \in (0, 2)$  için artan,  $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$  için azalan; b)  $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$  için artan,  $x \in (-2, 3)$  için azalan; c)  $x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$  için artan,  $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$  için azalan; ç)  $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$  için artan,  $x \in (-2, 3)$  için azalan;  
 3. a)  $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$  için artan,  $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$  için azalan; b)  $x \in (-1, 1)$  için artan,  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  için azalan; c)  $x \in \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$  için artan,  $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$  için azalan; ç)  $x \in (0, +\infty)$  için artan,  $x \in (-\infty, 0)$  için azalan; 4. a)  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  için artan,  $x \in (-1, 1)$  için azalan; b)  $x \in (0, 2)$  için artan,  $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$  için azalan; c)  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  için artan,  $x \in (-1, 1)$  için azalan; ç)  $x \in (-1, +\infty)$  için artan,  $x \in (-\infty, -1)$  için azalan.

## FONKSİYONUN EKSTREMUM DEĞERLERİNİ İNCELEME

1. a)  $A(-7, -14)$ 'te maksimum,  $B(-1, -2)$ 'de minimum; b)  $(-1, -2)$ 'de maksimum,  $(1, 2)$ 'de minimum; c)  $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{22}{27}\right)$ 'de maksimum,  $(1, -2)$ 'de minimum; ç)  $(1, 1)$ 'de minimum; d) ekstremum yok; e)  $\left(-1, \frac{5}{3}\right)$ 'de maksimum,  $(3, -9)$ 'de minimum; 2. a)  $(-1, 2)$ 'de maksimum,  $(-5, 10)$ 'de minimum;  
 b)  $(-1, 2)$ 'de minimum,  $(1, 2)$ 'de minimum; c)  $(1, 2)$ 'de maksimum,  $\left(-\frac{1}{3}, \frac{22}{27}\right)$ 'de minimum; ç)  $(1, 1)$ 'de maksimum; d)  $(3, 4)$ 'de maksimum,  $(1, 0)$ 'de minimum; e)  $(-1, 5)$ 'te maksimum,  $(3, -27)$ 'de minimum; 3.  $(2, -3)$ 'te maksimum,  $(8, 3)$ 'te minimum; 4.  $(2, 7)$ 'de maksimum,  $(0, -1)$ 'de minimum.

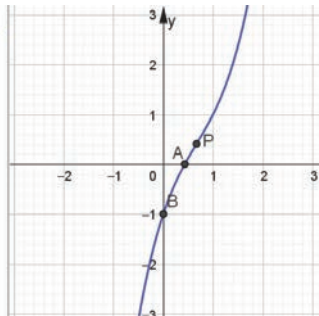
## FONKSİYONUN KONVEKS LİK VE KONKAV L IĞINI İNCELEME, DÖNÜM NOKTALARI

1.  $x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$  için konkav (aşağı doğru),  $x \in \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$  için konveks (yukarı doğru), dönüm noktası  $P\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{27}\right)$ ; 2.  $x \in (-\infty, 1)$  için konkav (aşağı doğru),  $x \in (1, +\infty)$  için konveks (yukarı doğru); 3.  $a = 3$ ; 4. Dönüm noktaları  $P_1(1, 1)$ ,  $P_2\left(-2 + \sqrt{3}, \frac{1 + \sqrt{3}}{4}\right)$ ,  $P_3\left(-2 - \sqrt{3}, \frac{1 - \sqrt{3}}{4}\right)$ . Doğru denklemi  $x - 4y + 3 = 0$ .

## FONKSİYONUN AKIŞINI İNCELEME VE GRAFİĞİNİ ÇİZME

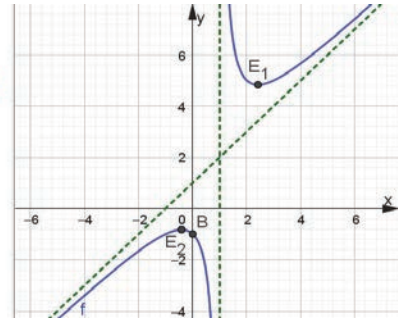
$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$

A = (0.43, 0)  
 B = (0, -1)  
 I1 =  $\emptyset$   
 P = (0.67, 0.41)



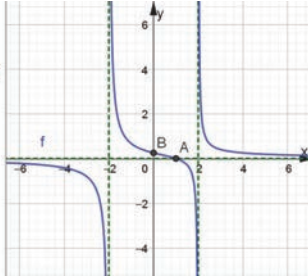
$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

B = (0, -1)  
 I1 =  $\{y = x + 1, x = 1\}$   
 E<sub>1</sub> = (-0.41, -0.83)  
 E<sub>2</sub> = (2.41, 4.83)

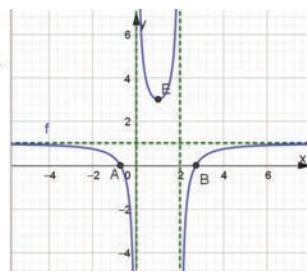




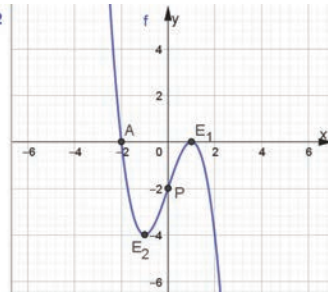
c)  $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$   
 $B = (0, 0.25)$   
 $I1 = \{y = 0, x = -2, x = 2\}$   
 $A = (1, 0)$



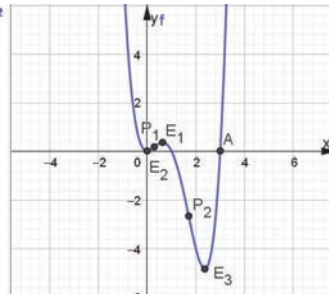
2. a)  $f(x) = \frac{x^2-2x-2}{x^2-2x}$   
 $I1 = \{y = 1, x = 0, x = 2\}$   
 $E = (1, 3)$   
 $A = (-0.73, 0)$   
 $B = (2.73, 0)$



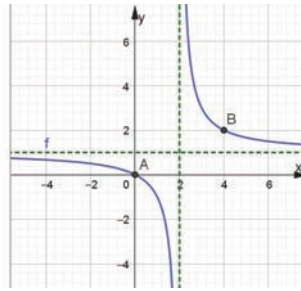
b)  $f(x) = -x^3 + 3x - 2$   
 $I1 = \emptyset$   
 $P = (0, -2)$   
 $E_1 = (-1, -4)$   
 $E_2 = (1, 0)$   
 $A = (-2, 0)$



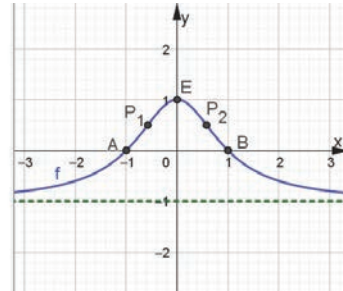
c)  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$   
 $I1 = \emptyset$   
 $P_1 = (1.71, -2.66)$   
 $P_2 = (0.29, 0.16)$   
 $E_1 = (2.37, -4.85)$   
 $E_2 = (0.63, 0.35)$   
 $E_3 = (0, 0)$   
 $A = (3, 0)$



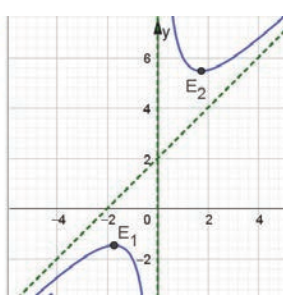
3. a)  $f(x) = \frac{x}{x-2}$   
 $I1 = \{y = 1, x = 2\}$   
 $A = (0, 0)$   
 $B = (4, 2)$



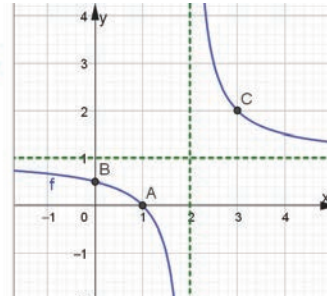
b)  $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2+1}$   
 $I1 = \{y = -1\}$   
 $A = (-1, 0)$   
 $P_1 = (0.58, 0.5)$   
 $P_2 = (-0.58, 0.5)$   
 $B = (1, 0)$   
 $E = (0, 1)$



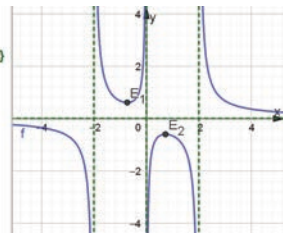
c)  $f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x}$   
 $I1 = \{y = x+2, x = 0\}$   
 $E_2 = (1.73, 5.46)$   
 $E_1 = (-1.73, -1.46)$   
 $B = (0, \infty)$



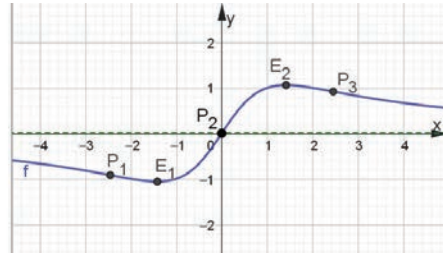
4. a)  $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$   
 $I1 = \{y = 1, x = 2\}$   
 $A = (1, 0)$   
 $B = (0, 0.5)$   
 $C = (3, 2)$



b)  $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-4x}$   
 $I1 = \{y = 0, x = -2, x = 0, x = 2\}$   
 $E_1 = (0.73, -0.61)$   
 $E_2 = (-0.73, 0.61)$



c)  $f(x) = \frac{3x}{x^2+2}$   
 $I1 = \{y = 0\}$   
 $E_1 = (-1.41, -1.06)$   
 $E_2 = (1.41, 1.06)$   
 $P_2 = (0, 0)$   
 $P_1 = (-2.45, -0.92)$   
 $P_3 = (2.45, 0.92)$





5. a)

$$f(x) = (1 - x^2) e^{-x}$$

$$I1 = \{y = 0\}$$

$$E_1 = (-0.41, 1.25)$$

$$E_2 = (2.41, -0.43)$$

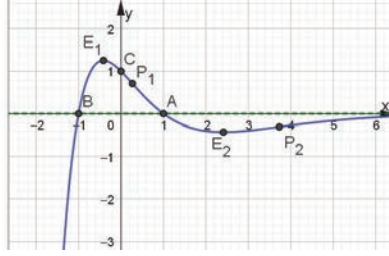
$$P_1 = (0.27, 0.71)$$

$$P_2 = (3.73, -0.31)$$

$$A = (1, 0)$$

$$B = (-1, 0)$$

$$C = (0, 1)$$



b)

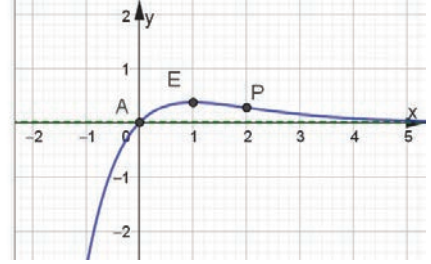
$$f(x) = x e^{-x}$$

$$I1 = \{y = 0\}$$

$$E = (1, 0.37)$$

$$A = (0, 0)$$

$$P = (2, 0.27)$$



c)

$$f(x) = x^2 e^x$$

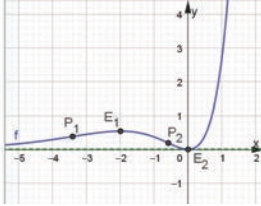
$$I1 = \{y = 0\}$$

$$E_1 = (0, 0)$$

$$E_2 = (-2, 0.54)$$

$$P_1 = (-3.41, 0.38)$$

$$P_2 = (-0.59, 0.19)$$



6. a)  $D = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ ; b)  $A = (0.75, 0)$ ; c)  $B = (0, 1)$ ; ç)  $x \in (-\infty, 0) \cup (1.5, 3) \cup (3, +\infty)$  için artan,  $x \in (0, 1) \cup (1.5, 3)$  için azalan; d)  $x \in (-\infty, -0.85) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$  için dışbükey,  $x \in (-0.85, 1)$  için içbükey; e)  $B(0, 1)$ 'de maksimum,  $C(1.5, 4)$ 'te minimum; f)  $D = (-0.85, 0.9)$ ; g)  $f(4) = -4.33$ ; ğ)  $x = 1.5$ ; h) ne çift ne tek; 7. a)  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ ; 6); b)  $A = (0, 0)$ ; c)  $B = (-3, -4.5)$ ; ç)  $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$  için artan,  $x \in (-3, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 3)$  için azalan;  $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$  için dışbükey,  $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$  için içbükey; e)  $B(-3, -4.5)$ 'te maksimum,  $C(3, 4.5)$ 'te minimum; f)  $A = (0, 0)$ ; h)  $f(4) = 4.92$  i) tek;

#### 9. EKSTREMUM PROBLEMLERİNİ ÇÖZMEK İÇİN TÜREV UYGULAMALARI

1. 21 ve 21; 2.  $\frac{27}{2}$  ve  $\frac{27}{2}$ ; 3. 9 ve 9; 4. Kenarı  $\frac{13}{2}$  olan kare; 5. Kenarı  $\frac{11}{2}$  olan kare; 6. 12m kenarlı 8 rahleli kare;  
7. Kenarları  $5\sqrt{2}$  olan ikizkenar dik üçgen; 8. Kenarları 4cm ve 1,5cm, alanı  $3\text{cm}^2$  olan dikdörtgen;  
9. Yarıçapı 3cm, yüksekliği 6cm olan eşkenar silindir; 10.  $r = \frac{8}{3}\text{cm}$ ,  $h = 2\text{cm}$ ,  $V = \frac{128}{9}\pi\text{cm}^3$ ;  
12. Kenarı 6cm olan kare,  $V = 3888\text{cm}^3$ ; 13.  $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$ ; 14.  $P = \frac{32\sqrt{3}}{9}$  noktasında.

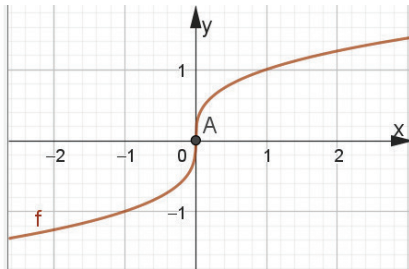
#### TEKRARLAMA VE PRATİKTE UYGULAMA ALİŞTIRMALARI:

1.  $12x^2 - x + 3$ ; 2.  $\frac{5}{2(x+3)\sqrt{(x-2)(x+3)}}$ ; 3.  $\frac{5}{(3x-2)(x+1)}$ ; 4.  $e^{3x}(3\sin(x^2+1) + 2x\cos(x^2+1))$ ; 5.  $y = 4$ ; 6.  $y = -x + 1$ ;  
7.  $v = s'(2) = 8$ ; 8.  $a = s''(1) = 20$ ; 9.  $t: y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$  ve  $n: y = -3x - 10$ ; 10.  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  için azalan; 11.  $(0, 0)$ 'da maksimum,  $(2, -8)$ 'de minimum; 12.  $x \in (-\infty, 1)$  için dışbükey,  $x \in (1, +\infty)$  için içbükey. Dönüm noktası  $(1, -2)$ ;

13.

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

$$A = (0, 0)$$



14.

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

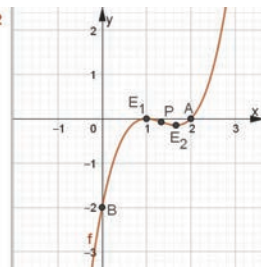
$$E_1 = (1.67, -0.15)$$

$$E_2 = (1, 0)$$

$$P = (1.33, -0.07)$$

$$A = (2, 0)$$

$$B = (0, -2)$$



15. 30 ve 30; 16. 40 ve 40; 17. 50 ve 50; 18. Kenarı 11cm olan kare; 19. Silindirin yarıçapı  $\frac{2r}{3}$ , yüksekliği  $\frac{H}{3}$ ; 20. Koninin yarıçapı  $R\sqrt{2}$ , yüksekliği  $4R$ . Hacmi  $\frac{8\pi}{3}R^3$ .

